

---

# Inleiding en Samenvatting

---

## Inleiding

In dit tijdperk van de computer komt een enorme hoeveelheid afbeeldingen voort uit computers<sup>1</sup>. Computers bieden grote voordelen voor afbeeldingen op het gebied van acquisitie, opslag, manipulatie, vermenigvuldiging, verzenden, etc.

## Beelden

In het algemeen weet de menselijke gebruiker zowel de inhoud van een beeld<sup>2</sup> als de betekenis. In deze vorm fungeren afbeeldingen alleen maar als *toegevoegde* informatie bij het geschreven verhaal. Het tegenovergestelde is echter ook mogelijk: de afbeelding kan het *subject* zijn dat verduidelijkt dient te worden. Het is een intrigerende vraag of het mogelijk is de computer data zodanig te manipuleren dat de inhoud, de bedoeling, duidelijker of meer expliciet wordt met een zo klein mogelijk aantal interacties tussen de mens en de computer. Om dit te bereiken moeten verschillende observaties in overweging worden genomen:

- Er is “iets” in de werkelijke wereld dat onderdeel is van het beeld, zoals personen, vliegtuigen, sterren of hersentumoren.
- “Het” is slechts digitaal aanwezig op de computer. Er zijn alleen maar “enen en nullen” die zo zijn gecombineerd dat “het” gevisualiseerd kan worden.
- Er moet “iets” gedaan worden met “het”, bijvoorbeeld het benadrukken of het eruit halen van belangrijke delen.

---

<sup>1</sup>Ook de afbeelding op de voorkant van dit proefschrift.

<sup>2</sup>In het vervolg gebruik ik het woord ‘beeld’ in plaats van afbeelding als vertaling van ‘image’.

- Datgene wat er gedaan is, moet in een betekenisvolle en reproduceerbare manier gedaan zijn. Het is niet zo moeilijk met beelden te spelen, delen te wissen en snorretjes te tekenen, maar het moge duidelijk zijn dat dat niet de bedoeling is.
- De uitkomst van de hetgeen gedaan is, dient op een zinvolle manier gepresenteerd te worden.

De lezer voele zich natuurlijk vrij extra eisen toe te voegen.

Beeldacquisitie en de analyse van computer data die “iets” voorstelt, kortweg *beeldanalyse*, kennen interactie met verschillende wetenschappelijke disciplines, die variëren van wiskunde, via (bijvoorbeeld) biologie en informatica, tot natuurkunde. Zo vond in het begin van de beeldanalyse het meeste onderzoek plaats op signalen, zoals radar en sonar, door de elektrotechnische gemeenschap. Tegenwoordig is daarentegen medische beeldbewerking het onderwerp van een groot deel van het onderzoek.

### Beeldacquisitie

Hoe situaties in het werkelijke leven worden vastgelegd door “observatie machines” als digitale camera’s, MR scanners of telescopen, kan beschreven worden met *fysische “wetten”*. Deze wetten zijn regels die opgelegd worden door de intrinsieke eigenschappen van de observatie machine. In het algemeen hebben ze totaal geen a-priori relatie met de situatie in het werkelijke leven zelf. We kunnen dus wel afbeeldingen van alles en nog wat maken, maar de manier waarop het beeld wordt verkregen, is ongerelateerd aan de *buiten* wereld.

De initiële beelden, ook wel ruwe data genoemd, zijn echter verkregen door de observatie machine en ze hangen dus sterk af van de keuzes van de parameters *binnen* in de observatie machine. Een close-up opname bijvoorbeeld, kan niet worden omgezet in een panorama opname. Hetzelfde geldt voor het omgekeerde, als dezelfde resolutie gewenst is. Ook de uitkomst van een MR scan bevat extra informatie, zoals “T1” of “T2” gewogen, hetgeen informatie geeft over de manier waarop de meting is verricht. Dit houdt niet alleen in dat fysica aan de basis van beelden ligt, maar zorgt tevens voor een verlies aan informatie, in de zin dat de verkregen data slechts *gedeeltelijk* de situaties in het werkelijke leven voorstellen. Als de parameters in de observatie machine goed gekozen zijn, is dat niet zo erg, hoewel het de beperktheid van verdere resultaten aangeeft. Als we een close-up willen, moeten we daar gewoon van tevoren op inspelen. Een andere type verlies ligt in de wens de data op een *georganiseerde, digitale* manier te verkrijgen. Op die manier is er de mogelijkheid de data geschikt te maken voor opslag, berekeningen en representatie op een computer. Hoewel alle observatie machines hun fysische grenzen hebben (fotokorrels, dichtheid van fotonen, magnetische spin), wordt meestal een vaste, bepaalde resolutie gekozen, zodat de data handelbare afmetingen heeft. De situaties van het werkelijke leven worden dus gereduceerd tot een verzameling van losse metingen die netjes geordend zijn op een bepaald raster.

### Beeldanalyse

In vele gevallen is de volgende stap iets *doen* met de data: ze zijn immer verkregen met een bepaald doel. Ze is de uitkomst van een beeldacquisitie procedure en op hun beurt weer de invoer van een beeldanalyse taak. Gedeeltes van de data kunnen dus meer relevante informatie bevatten dan andere delen en dienen ontstoord, benadrukt of eruit gehaald worden, zoals: nieuwe melkwegstelsels, zwarte gaten of planeten met de mogelijkheid van leven in astronomische data; hersentumoren, slagaderlijke zwellingen of zwakke botten in medische beelden; kentekenplaten of mogelijke verdachten in forensische data,

etc. Hier komt duidelijk veel menselijk inzicht en interpretatievermogen om de hoek kijken. Wiskundige modellen die gebaseerd zijn op de veronderstelde verstoring in het beeld, op de intrinsieke eigenschappen van de interessante objecten, of op bijvoorbeeld biologische of medische kennis, worden voorgesteld en geïmplementeerd in computer algoritmen. De uitkomst wordt gevalideerd en gebruikt – of niet. In het laatste geval wordt het model aangepast, geïmplementeerd, etc. Hier wordt iets opmerkelijks duidelijk. De validatie kan aangeven of een model goed of slecht is – binnen het raamwerk van de aannames –, maar de verwerping of het gebruik van het resultaat is vaak gebaseerd op de mens die interpreterend naar de uitkomsten kijkt. Het oordeel is duidelijk gebaseerd op een visuele inspectie van de gegenereerde gegevens, op grond van de kundigheid en ervaring van de interpreterende mens. Wil een model het goed doen, dan moet het een zekere coherentie hebben met het menselijk visuele en interpretatievermogen. Een andere manier om dat te verwoorden, is dat het model het menselijk visuele en interpretatievermogen op één of andere manier dient te simuleren. Daarom is er binnen beeldanalyse ook een rol weggelegd voor (neuro-)biologie, dat onderzoekt welke mechanismen betrokken zijn bij kijken, het transporteren van data naar de hersenen en het interpreteren van deze data (en het vervolgens weer terugkoppelen naar de ogen).

### Meer en Meer Data

De exponentiele groei van computer faciliteiten in de laatste tientallen jaren heeft geleid tot een geweldige groei in data, zowel door de observaties – het verkrijgen van beelden – als door de voorgestelde modellen – de beeldanalyse taken. Aan de invoerkant kunnen verschillende redenen worden gevonden:

- Het aantal acquisities groeide.
- Het formaat van een acquisitie groeide.
- De acquisities werden gecompliceerder.

Dit was duidelijk het gevolg van de groter wordende opslag capaciteit. Binnen de medische beeldanalyse kan men denken aan een groeiend aantal MR beelden, met een factor 2, 4 of meer gedetailleerd, en de overgang van twee naar drie dimensionale beelden, en zelfs naar tijdreeksen ervan. Aan de uitkomsten kant vond ook een groei plaats. Rekening legt een zware voorwaarde op mogelijke algoritmen. Als een gevolg daarvan waren de algoritmes in de begintijd van de beeldanalyse eenvoudig en vaak gebaseerd op éénstaps *filters*, enkelvoudige operaties op een twee dimensionaal beeld op een rechthoekig raster. Men kan daarbij denken aan *randdetectie* en aan *ruisreductie*.

De stijgende CPU snelheid leidde tot een stijgend *aantal* voorgestelde wiskundige modellen en een stijgende *complexiteit* ervan. In plaats van éénstaps filters waren meerstaps filters nodig om de voorgestelde modellen te representeren: een opeenvolging van dezelfde ingewikkelde operatie op een beeld levert de uitkomst. De modellen beschrijven een gewenste situatie van het beeld, gegeven een aantal randvoorwaarden, zoals de eis van zowel randdetectie als ruis onderdrukking.

Ook ontstonden nieuwe taken gebaseerd op beeld *herkenning* binnen deze enorme hoeveelheid beschikbare beelden. Bijvoorbeeld: “Vind een afbeelding van Rembrandt’s Thuiskomst van de Verloren Zoon op internet”, of: “Gegeven een afbeelding van een naald, vind z’n plaats (of vind soortgelijke afbeeldingen) in een beeld database, een (hooi)berg van afbeeldingen.” Dit soort taken leidde tot de ontwikkeling van digitale beeldbeheer systemen, ook wel “afbeeldingopslag en -communicatie systemen” genoemd. Ze zijn bijvoorbeeld in opkomst in klinische en radiologische omgevingen.

Een andere nieuwe taak is beelden *vergelijken*: beschrijven twee beelden hetzelfde op een voorgeschreven manier? En bij stereo beelden: kunnen we de drie dimensionale situatie zo goed mogelijk reconstrueren gegeven de twee beelden van het linker- en rechteroog (of camera).

### Over Bomen en een Bos

Deze explosieve groei van data aan de invoer- en de uitvoerkant vereist duidelijke en transparante wiskundige methoden die ze reguleren en wildgroei voorkomen: alles is mogelijk, maar niet alles is nuttig. Sterker nog, wiskundige modellen en algoritmen hebben de neiging te functioneren als “zwarte dozen”, waarvan de uitkomsten met een paar parameters geregeld kunnen worden. Verschillende problemen doken op. Om er een paar te noemen:

- Het is niet altijd duidelijk wat voor soort gedrag verwacht kan worden als bepaalde modellen toegepast worden.
- De keuzes bij het vaststellen van de parameterwaardes hangen af van de persoon die met de beelden werkt en de relatie tussen de keuzes en de uitkomst is niet duidelijk.
- Het is soms niet duidelijk wat de parameters “voorstellen”, of wat een combinatie ervan inhoudt.
- Een kleine verandering in de parameters leidt soms tot grote veranderingen in het uiteindelijke beeld.
- De ruwe data bestaat uiteraard uit een discrete verzameling van getallen. Het is dus niet triviaal om continue wiskundige modellen erop toe te passen.

De eerste drie punten benoemen de *ad hoc natuur*, het vierde punt laat de zogeheten *slechte gesteldheid* zien en het laatste item duidt een *conceptueel probleem* aan. De laatste tijd is het aantal wiskundigen dat geïnteresseerd is in beeldanalyse sterk gegroeid, omdat bovengenoemde problemen verklaard kunnen worden door de gebruikte modellen wiskundig te onderzoeken. Beeldanalyse blijkt een veelbelovend toepassingsgebied van de wiskunde te zijn, zelfs als gebruik gemaakt wordt van sterk abstracte theorieën die voor niet-wiskundigen totaal niet duidelijk zijn.

### De Combinatie is Meer dan de Som der Delen

Samenvattend: binnen het gebied van de beeldanalyse is de combinatie van natuurkunde, elektrotechniek, wiskunde, (neuro-)biologie en informatica, samen met kennis van toepassingsgebieden van specifieke beeldanalyse taken, noodzakelijk om zinvolle resultaten te bereiken. De lezer kan wel raden dat dit gigantische wetenschapsgebied onmogelijk in één proefschrift omvat kan worden.

### Samenvatting van dit Proefschrift

In dit proefschrift beperk ik mij tot de wiskunde rond de ruwe data, het initiële beeld, dat digitaal opgeslagen is. Hoe de beelden verkregen zijn, is voor kennisgeving aangenomen en verder niet relevant. Het is ook niet bekend wat ze voorstellen of welke speciale objecten er aanwezig zouden kunnen zijn. Als een gevolg daarvan is validatie van de resultaten met betrekking tot een hooggespecificeerde taak, zoals

segmentatie, *niet* van toepassing, omdat ik eenvoudigweg veronderstel dat er geen hooggespecificeerde taak is. De validatie vindt plaats op een ander vlak. De *methoden* en *modellen* die gebruikt en afgeleid worden, dienen een “betekenis” te hebben. De uitkomst dient dus voorspelbaar en begrijpbaar zijn op grond van de methoden en modellen. Men kan dit een laaggespecificeerde taak noemen die gebaseerd is op de data en niet op de afbeelding.

De volgende paragrafen beschrijven in het kort de hoofdstukken van dit proefschrift. Omdat de hoofdstukken als artikelen (zullen) verschijnen, vindt er enige overlapping plaats in de beschrijving van schaalruimte en catastrofe theorie in de “introductie” en “theorie” delen van de verschillende hoofdstukken. Om deze hoofdstukken leesbaar te houden, is hierin geen verandering gebracht.

## Hoofdstuk 2

Hoofdstuk 2 bespreekt meer gedetailleerd het laatste probleem dat hierboven genoemd is, over het verschil tussen discrete data en continue modellen. Dit verschil is wiskundig opgelost door Schwartz’ “Distributie Theorie”. Een fysische benadering, gebaseerd op het “Pi Theorema”, komt neer op het idee om de noodzakelijke parameter *schaal* te introduceren. Of beter: om die te ont-dekken. De punten in een beeld zijn erdoor gerelateerd en kunnen alleen daardoor geïnterpreteerd en gebruikt worden. Onder bepaalde aannames, zoals dat “er niets van het beeld bekend is”, worden er oplossingen gevonden die aan de wiskundige voorwaarden voldoen. Omdat er geen a-priori te prefereren schaal is, kunnen (en moeten) alle mogelijke schalen gebruikt worden. Het beeld wordt daarom uitgebreid met een extra dimensie, schaal, en dit nieuwe beeld vormt een *schaalruimte*.

Een van de eerdergenoemde oplossingen houdt in dat het oorspronkelijke beeld geconvolveerd wordt met een Gaussisch profiel, waarvan de breedte gerelateerd is aan de schaal. Deze schaalruimte heet daarom *Gaussische schaalruimte*. Tegelijkertijd is dit profiel de algemene oplossing van de zogenoemde *Diffusie Vergelijking*, of *Warmte Vergelijking* als schaal wordt opgevat als tijdparameter. Deze vergelijking beschrijft de verspreiding van warmte over tijd als een homogene plaat in het begin op verschillende plekken wordt verwarmd. Zoals men kan voorstellen heeft de plaat aan het einde (als we “oneindig” lang wachten) een constante temperatuur. Hetzelfde geldt voor het schaalruimte beeld: op een “oneindig” grote schaal heeft het beeld een constante waarde. Het vergroten van schaal leidt dus tot vervaging. Een belangrijke eigenschap is lineariteit, waardoor deze schaalruimte een *lineaire schaalruimte* is.

Vanuit het oogpunt van de eindgebruiker die slechts let op de individuele beelden, zal het toepassen van een schaalruimte de hoeveelheid ruis wel verminderen, maar ook alles vervagen, waardoor het onbruikbaar kan worden voor bijvoorbeeld segmentatie taken. Het gebruiken van alle schalen is daarentegen redundant. Daarom wordt ook wel de omgekeerde route genomen: met de diffusie vergelijking als uitgangspunt kan het nut voor beeldanalyse onderzocht worden. Men kan dus ook niet-lineaire versies ervan bestuderen. Taakspecifieke informatie kan gebruikt worden bij het modelleren, waardoor deze aanpak *geometrisch gedreven diffusie* wordt genoemd. Een stap verder is het gebruik van elke partiële differentiaal vergelijking (PDE), hetgeen de oneindige reeks van de PDE-benaderingen oplevert. Zoals al eerder opgemerkt, geldt voor deze benaderingen dat ze met de data “iets doen met een bepaalde bedoeling”.

Naar de lineaire diffusie vergelijking terugkerend, komt de vraag op wat de relevantie met betrekking tot *biologisch modelleren* van (onderdelen van) het visuele systeem is. Het blijkt dat in de eerste momenten van het visuele systeem, als licht in het oog valt en visuele stimuli naar de hersenen getransporteerd worden, zowel Laplaceaanse profielen als vervaging optreedt. Dit geeft de mogelijkheid aan

om een Gaussische schaalruimte te gebruiken als model voor dit stadium van zien. De schaalruimte kan gevisualiseerd worden door een stapel gesimplificeerde versies van het beeld. Gedurende de simplificatie verdwijnen gebieden in een opeenvolgende manier. Theoretisch kan dus een *hiërarchische structuur* worden gevonden: er zijn gebieden binnen gebieden.

Een kort overzicht van enige resultaten van onderzoek van *Gaussische schaalruimte* met betrekking tot beeldanalyse en de intrinsieke eigenschappen van de laatste jaren besluiten dit hoofdstuk. Lezers die reeds bekend zijn met (Gaussische) schaalruimte, kunnen dit hoofdstuk overslaan. In de volgende hoofdstukken veronderstel ik bekendheid met het schaalruimte concept.

### Een Diepe Gedachte over Diepe Structuur

Weten dat schaal belangrijk is en dat het nemen van een enkele schaal niet geschikt is, is één ding. Het bevat nog niet de notie van schaalruimte. De relevantie ligt in het onderzoek van Gaussische schaalruimte *zelf*, dat wil zeggen, alle schalen tegelijk. Dit wordt de *diepe structuur* van Gaussische schaalruimte genoemd. Het is de taak om te onderzoeken – en hopelijk te begrijpen — wat er gebeurt tussen twee verschillende schalen en welke mechanismen optreden als de schaal geleidelijk wordt veranderd. Dat is het onderwerp van dit proefschrift.

Hiervoor beschouw ik het beeld als een hoogtefunctie. Ik beperk mij tot de meest basale eigenschappen van deze functie: de kritieke punten en enige deelverzamelingen van punten met dezelfde waarde. Deze punten geven een adequate beschrijving van een beeld, denk bijvoorbeeld aan een twee dimensionaal beeld met zijn kritieke punten (minima, maxima en zadels) en de isofoten door de zadels. Deze laatste omsluiten gebieden in het beeld.

### Hoofdstuk 3

Op dit punt ontmoet men nog steeds problemen bij het toepassen van wiskundige handelingen (het vinden van kritieke punten) op een discreet raster. In hoofdstuk 3, een kort intermezzo, leg ik de problemen uit die voortkomen uit de keuze voor een *rechthoekig* raster: De horizontale en verticale nabuurrelaties en de uitbereiding ervan naar de dubbele diagonale nabuurrelaties, geven wiskundige en praktische problemen. Een *zeshoekig* raster lost het probleem op. Tevens is het in het menselijk gezichtsvermogen aanwezig. Ik zal dit gebruiken door het rechthoekige raster als zeshoekig te beschouwen.

### Hoofdstuk 4

Nu het mogelijk is kritieke punten te detecteren, is het tijd ze over schaal te *volgen*. Een belangrijk resultaat dat uit het wiskundige gebied van singulariteiten komt, laat zien dat bij vergrotende schaal spatiële kritieke punten allen in paren kunnen verdwijnen (annihilatie). In twee (en hogere) dimensies kunnen zulke paren ook ontstaan (creatie). Als we dus naar een serie vervagende beelden kijken, zien we het aantal kritieke punten veranderen. De locaties in schaalruimte waar deze annihilaties en creaties plaats vinden, worden *catastrofepunten* genoemd. In hoofdstuk 4 wordt de beweging van spatiële kritieke punten onderzocht. In een enkel beeld op een bepaalde schaal liggen kritieke punten in het algemeen “tussen de raster punten” (sub-pixel) en alleen de omliggende punten worden gevonden. Idealiter wordt de beweging gevonden door gebruik te maken van de tangent vector aan het schaalruimte kritieke pad waarover ze bewegen. In het discrete geval kan de beweging worden geschat met behulp van storingsrekening.

Dit levert vectoren in schaalruimte op, die met sub-pixel precisie wijzen naar de locatie van het kritieke punt op een grotere schaal. Wordt ook schaal informatie gebruikt dan kan de locatie preciezer worden berekend. De zaak wordt gecompliceerd als catastrofepunten betrokken zijn. Dan is de formulering die gebruikt wordt voor kritieke punten niet langer geldig en een ingewikkelder expressie is noodzakelijk. Deze wordt dan ook gegeven.

Alle expressies worden gegeven in een willekeurig coördinaten systeem, de *co-variante formulering*. Dit is een belangrijke notie, daar alle theoretische resultaten in zogenoemde *canonieke coördinaten* worden gegeven. Deze coördinaten zijn zo gekozen, dat het stelsel eenvoudig en simpel te beschrijven en te begrijpen is. In de werkelijkheid komt men echter zo een situatie bijna nooit tegen, omdat het coördinaten systeem meestal van te voren vastgesteld is en niet aangepast is aan de lokale configuratie van het beeld. Elke catastrofe is daarentegen wel weer lokaal op zo een eenvoudige wijze te beschrijven. De determinant van de matrix die in de expressie voor het vinden van catastrofepunten voorkomt, is tegelijkertijd een indicator of het catastrofepunt een annihilatie of een creatie is. Experimenten laten zien dat de fractie van de ruimte waar creaties “toegestaan” zijn door het teken van deze determinant, relatief klein is. Dit sluit aan bij de intuïtie dat er meer annihilaties zijn te verwachten dan creaties, omdat op één na alle extrema annihileren. Voorbeelden van de theorie worden gegeven op twee dimensionale beelden.

## Hoofdstuk 5

In hoofdstuk 5 worden deze resultaten gebruikt om kritieke curven in schaalruimte te maken. De spatiale kritieke punten van het beeld worden voor toenemende schaal berekend en aan elkaar gekoppeld, waardoor ze kritieke takken van extrema en zadelpunten vormen. De takken worden in de catastrofepunten aan elkaar gekoppeld, waarmee de kritieke curven worden gevormd. In het schaalruimte beeld zijn catastrofepunten reguliere punten. Ik laat zien dat de enige kritieke punten in schaalruimte *schaalruimte zadelpunten* zijn, welke liggen op de zadeltakken. Als de intensiteit van de kritieke punten over schaal wordt gevolgd, dan dalen maxima monotoon en stijgen minima monotoon. Zadeltakken kunnen daarentegen lokale extrema met betrekking tot de intensiteit hebben. Ik laat zien dat deze lokale extrema plaats vinden in de schaalruimte zadels.

Gebruik makend van het feit dat extrema onderdrukt worden dankzij de diffusie vergelijking, wordt bereikt dat oppervlakken met gelijke intensiteit in schaalruimte een koepelvorm hebben als ze een extremumtak snijden. Als het oppervlak geen zadeltak snijdt, omsluit het een gesloten gebied in schaalruimte, waarbij de top samenvalt met het snijpunt van de extremumtak en het oppervlak. Elke extremumtak snijdt een oppervlak dat een zadel bevat. Dit is ofwel een spatiëel zadel in het oorspronkelijke beeld, of een schaalruimte zadel. Dit *kritieke oppervlak* vormt de grens van een serie van om elkaar vallende gesloten gebieden. Aan alle annihilerende extrema kan zo een kritiek gebied worden toegekend.

Door deze nestende eigenschap van Gaussische schaalruimte volgt een hiërarchische procedure recht toe, rechtaan. De gebieden definiëren een “*pre-segmentatie*” van het oorspronkelijke beeld. Deze speciale segmentatie wordt verkregen zonder enige kennis van het beeld, in tegenstelling tot de gebruikelijke definitie van een willekeurige segmentatie. Het is een “complete” segmentatie in de zin dat alle structurele (topologische) betekenisvolle segmenten betrokken zijn. In de praktijk is het typisch een “oversegmentatie”, omdat het gehele beeld opgedeeld is, terwijl verschillende pre-segmenten typisch tot een “semantisch” segment zullen behoren, bijvoorbeeld een enkel weefsel type in een MR beeld. Gesteld wordt daarentegen – hierin ligt de ware betekenis – dat een pre-segmentatie nooit een “ondersegmentatie” is, omdat het opdelen van een pre-segment niet gerechtvaardigd wordt van de kant van de data.

Natuurlijk kan een ervaren gebruiker met behulp van externe kennis toch een opdeling opleggen.

Merk op dat de pre-segmentatie alleen wordt verkregen doordat een Gaussische schaalruimte volgt uit de noodzakelijkheid van schaal. Ik geef voorbeelden van de beschreven procedure en resultaten.

## Hoofdstuk 6

De eerdergenoemde procedure gebruikt *generieke* catastrofes: gebeurtenissen met precies twee kritieke punten. Soms is het nodig te veronderstellen dat ook *niet-generieke* gebeurtenissen voorkomen, als meerdere kritieke punten samenkomen. Dit is het geval als van drie kritieke punten er één over blijft, maar men is niet in staat het annihilerende paar te identificeren. Soms wil men die identificatie niet maken, bijvoorbeeld als het beeld lokaal symmetrisch is. De uitbereiding van het hiërarchische algoritme dat in staat is om met dit speciale geval om te gaan, wordt gegeven in hoofdstuk 6. Het grote voordeel is dat het de hiërarchische boomstructuur *stabiliseert*. Meerdere symmetrieën – denk aan een schaakbord – kunnen op een soortgelijke manier geïmplementeerd worden.

Ik bespreek tevens de *irrelevantie* van de creatie van kritieke punten met betrekking tot de boomstructuur en de pre-segmentatie. Vanuit het idee van de kritieke curven is dit duidelijk, omdat ze slechts uitstulpingen van de kritieke curve in schaalruimte vormen. Tenslotte laat het modelleren van lokale symmetrie zien dat een *zadeltak* *meerdere* schaalruimte zadels kan bevatten. Omdat het kritieke gebied dat aan een extremum is toegekend, bereikt wordt door het eerste oppervlak dat een zadel bevat, is er slechts één van relevant. In het geval van een minimum betreft het het schaalruimte zadel met de laagste intensiteit, in het geval van een maximum is het degene met de hoogste intensiteit.

Testen laten de toepassing van deze theorie zien.

## Hoofdstuk 7

In de vorige paragraaf noemde ik dat creaties “*slechts uitstulpingen van de kritieke curve in schaalruimte vormen*”. Dit vraagt om een meer gedetailleerde uitleg. Daarvoor wordt een belangrijk resultaat uit “Catastrofe Theorie” gebruikt, namelijk een lijst met polynomen die catastrofes en hun moeilijkheid beschrijft. Dat laatste wordt zichtbaar in het aantal parameters dat nodig is een catastrofepunt te verwijderen. Als schaal wordt opgevat als een parameter, is het duidelijk dat de gebruikelijke catastrofe in schaalruimte één parameter vereist. De catastrofes die in het vorige deel werden genoemd, hebben meerdere parameters nodig, bijvoorbeeld om de lokale symmetrie te verstoren. In hoofdstuk 7 onderzoek ik de lijst en pas die zó aan, dat de polynomen aan de diffusie vergelijking voldoen en dus schaalruimte polynomen worden. De aanpassing van polynomen met meerdere parameters leidt tot één speciale parameter, namelijk schaal. Ik laat zien dat met deze aanpassing *non-generieke gebeurtenissen* in schaalruimte gemodelleerd kunnen worden. Dat houdt niet alleen de meervoudige annihilaties in het geval van symmetrieën in, maar ook een beschrijving van de uitstulpingen van de kritieke curven.

Als de polynomen in de spatiële variabelen en een schaal parameter worden beschouwd, leveren ze een modellering van de kritieke curven zelf. Hier komen twee opmerkelijke zaken aan het licht. Allereerst zijn de uitstulpingen *niet* erg stabiel: een kleine verstoring doet ze geen kwaad, maar een iets grotere verwijdert ze van de kritieke curve. Dit is precies volgens intuïtie – bij het vervagen verdwijnen dingen, dus creaties zijn niet echt te verwachten. Maar wiskundig was ervan al bewezen dat het *lokaal* onjuist was voor kritieke punten. Ten tweede kunnen kritieke curven ook voorkomen als *gesloten lussen*, op een bepaalde schaal gecreëerd en op een grotere schaal geannihileerd. Deze curven zal men compleet

missen als alleen de kritieke curven volgt die in het originele beeld starten. Berekeningen aan beelden laten inderdaad het voorspelde gedrag voor de kritieke curven zien.

## Hoofdstuk 8

Het is nu tijd om terug te keren naar de hiërarchische structuur. In hoofdstuk 5 beschrijf ik de aanwezigheid van koepels in het schaalruimte beeld, maar er is meer over te zeggen. Zoals al genoemd omvatten de kritieke oppervlakken een hele reeks oppervlakken en bevatten ze een zadel, soms een schaalruimte zadel, soms een spatiëel zadel – in dat geval in het originele beeld. In hoofdstuk 8 onderzoek ik het andere deel van het oppervlak dat door het zadel gaat. Dit komt er eenvoudigweg op neer de structuur van de *oppervlakken met gelijke intensiteit* in schaalruimte en hun “uienschil”-structuur te onderzoeken. In een gewoon twee dimensionaal beeld zijn de isofoten genest, cirkelen rondom een extremum en snijden zichzelf in zadelpunten. Een curve door een zadel bevat dus twee delen. Voor schaalruimte beelden geldt iets soortgelijks. Een deel is reeds bekend, namelijk de kritieke koepel. De prangende vraag is wat voor informatie er in het *andere* deel bevat is.

Ik onderzoek het gedrag van de oppervlakken en laat zien dat als het andere deel van het oppervlak dat de kritieke koepel bevat, wordt meegenomen, op een elegante manier een eenduidige, op intensiteit gebaseerde schaalruimte hiërarchie wordt verkregen, die degene genoemd in hoofdstuk 5 omvat, maar veel *robuuster* is. De hiërarchie kan gevisualiseerd worden door een binaire boomstructuur, een structuur waarin elke knoop een ouder en twee kinderen heeft. Een van de kinderen is de koepel uit hoofdstuk 5, het andere kind is equivalent aan de ouder. Ze kan zelfs gereduceerd worden tot een verzameling van in elkaar vallende onderdelen, waarin elke knoop wordt gerepresenteerd door een paar haken. Binnen de haken staan de kinderen en de haken worden gelabeld met het kind dat de koepel bevat. Dit stelt men tegelijkertijd in staat een “*logisch filter*” te gebruiken: Kinderen in de boomstructuur die minder significant zijn, kunnen weggeveegd worden door de kleine takken te snoeien. En vanaf de andere kant bekeken: de meest significante schaalruimte delen zijn de sterkste, dikste (of grootste) takken. Men verkrijgt dus een structuur van het schaalruimte beeld dat impliciet aanwezig is, maar nog wel eruit gehaald moest worden.

## Conclusie

Dit brengt ons bij het einde van het proefschrift. De belangrijkste bijdrage is dat het onderzoek van de diepe structuur van Gaussische schaalruimte start. In de verschillende hoofdstukken geeft het nieuwe inzichten in het gedrag van spatiële kritieke punten onder de invloed van de schaal parameter, hetgeen kritieke curven met niet alleen generieke catastrofepunten, maar ook schaalruimte zadelpunten oplevert. Het modelleren van niet-generieke catastrofes geeft inzicht in de structuur van kritieke curven, zoals de aanwezigheid van kritieke curven die gesloten lussen vormen.

Een ander nieuw inzicht ligt in de oppervlakken met gelijke intensiteit in schaal ruimte. Een geschikte selectie ervan, gedeeltelijk gebaseerd op die door de schaalruimte zadels, delen het schaalruimte beeld – en dus het originele beeld – uniek in “gebieden van invloed”, geregeld door de extrema. Men krijgt dus gratis een hiërarchie van het beeld en de mogelijkheid tot een onvoorwaardelijke “pre-segmentatie”.

Verder zijn ook onvoorwaardelijke beeldanalyse taken mogelijk, zoals registratie, codering, compressie, clusteren, vereenvoudiging, transmissie en vergelijking – om er enige te noemen. Het sleutel

woord in al deze toepassingen is *onvoorwaardelijk*. De toepassingen volgen eenvoudigweg uit het feit dat een unieke gedefiniëerde hiërarchie beschikbaar is.

Dit is *volslagen verschillend* van elke gebruikergedefinieerde taak, hetgeen meestal het geval is. De hiërarchie is (impliciet) reeds aanwezig in *de diepe structuur van Gaussische schaalruimte beelden*.