

Samenvatting

Dit proefschrift gaat over mock thetafuncties. Deze mock thetafuncties zijn een “uitvinding” van de Indiase wiskundige Srinivasa Ramanujan. Ramanujan leefde van 1887 tot 1920. Hoewel hij nooit een universitaire studie heeft afgemaakt, wordt hij door velen gezien als een wiskundig genie. Ramanujan werkte erg intuïtief en bewees zelden z’n beweringen. Dit komt doordat hij door z’n onvolledige wiskundige opleiding nooit de kunst van het bewijzen heeft aangeleerd. Het leven en werk van Ramanujan bevat dan ook een element van mysterie en romantiek.

De mock thetafuncties ontdekte Ramanujan kort voor hij op 32 jarige leeftijd stierf. Hoewel verschillende wiskundigen zich na de dood van Ramanujan met de mock thetafuncties hebben beziggehouden, en ook verschillende resultaten hebben geboekt, is nooit echt duidelijk geworden wat er nu werkelijk aan de hand is. Daardoor vormen ze nog steeds een bron van raadsels voor hedendaagse wiskundigen. In dit proefschrift plaats ik de voorbeelden die Ramanujan gaf van mock thetafuncties in een diepere achterliggende theorie (namelijk die van reëel analytische modulaire vormen). Hiermee kan een natuurlijke verklaring worden gegeven voor de eigenschappen van mock thetafuncties, zoals Ramanujan die beschreef.

Het engelse werkwoord “to mock” betekent overigens zoiets als bespotten of spottend naäpen. We zouden dus ook kunnen spreken over spottende thetafuncties of nepthetafuncties (thetafuncties waren in Ramanujans tijd reeds uitgebreid bestudeerd en ook Ramanujan was hier vertrouwd mee), maar dit dekt niet helemaal de lading. In “Alice in Wonderland” van Lewis Carroll komt een nepschildpad (mock turtle) voor. Hiervan wordt nepschildpadsoep (mock turtle soup) gemaakt. In werkelijkheid is nepschildpadsoep natuurlijk nagmaakte schildpadsoep (gemaakt van kalfshoofd, kalfsvlees, etc.)

In hoofdstuk 1 bekijk ik de som

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{(-1)^n e^{\pi i(n^2+n)\tau + 2\pi i n v}}{1 - e^{2\pi i n \tau + 2\pi i u}} \quad (\tau \in \mathcal{H}, v \in \mathbf{C}, u \in \mathbf{C} \setminus (\mathbf{Z}\tau + \mathbf{Z})).$$

Ik noem dit een Lerch som, omdat deze som ook al werd bestudeerd door Lerch. Deze Lerch som transformeert bijna als een Jacobivorm onder substituties in (u, v, τ) . Ik laat zien dat het transformatiegedrag precies dat van een Jacobivorm wordt als we

er een (relatief eenvoudige) correctieterm bij optellen. Deze correctieterm blijkt niet holomorf te zijn in (u, v, τ) , alleen reëel analytisch. Voor bepaalde waarden van (u, v) zouden we de Lerch som als functie van τ een mock thetafunctie kunnen noemen, hoewel deze niet expliciet bij Ramanujan voorkomen.

In hoofdstuk 2 bekijk ik thetafuncties bij indefiniete kwadratische vormen. Deze thetafuncties zijn een aanpassing van een klasse van thetafuncties geïntroduceerd door Göttsche en Zagier, en lijken op de thetafuncties ingevoerd door Siegel. Voor deze indefiniete thetafuncties vind ik elliptisch en modulair transformatiegedrag, analoog aan het transformatiegedrag van thetafuncties behorende bij positief definitie kwadratische vormen. In het geval van positief definitie kwadratische vormen zijn de thetafuncties holomorf. De thetafuncties in dit hoofdstuk zijn dat niet. Door specialisatie van de parameters is het mogelijk om mock thetafuncties te verkrijgen uit deze indefiniete thetafuncties.

In hoofdstuk 3 bestudeer ik de modulariteit van de Fourier coëfficiënten van meromorfe Jacobivormen.

In hoofdstuk 4 gebruik ik het verband tussen mock thetafuncties en de indefiniete thetafuncties uit hoofdstuk 2, om deze mock thetafuncties in verband te brengen met reëel analytische modulaire vormen. We hadden echter even goed de methoden uit hoofdstuk 1 of hoofdstuk 3 kunnen gebruiken om tot hetzelfde resultaat te komen. Niet alle mock thetafuncties vallen in dit kader: Voor een tweetal mock thetafuncties van orde 5 zou een uitbreiding van mijn theorie gewenst zijn tot een andere klasse van indefiniete kwadratische vormen.