

Samenvatting

Het leven van alledag is niet zonder risico. Sommige mensen zijn bereid meer risico te nemen om meer te kunnen bereiken, anderen spelen liever ‘op safe’ en proberen zo min mogelijk risico te lopen. In financiële markten zien we vergelijkbare patronen bij agenten die een hoog respectievelijk laag risico-profiel hebben. Op deze markt kan het risico verhandeld worden: een agent die vindt dat hij/zij te veel risico loopt kan zich indekken door een passende *optie* te kopen. Een optie is een contract tussen koper en verkoper waarin de laatste belooft de eerste een bepaalde betaling te doen in de toekomst. Op het moment van afsluiten is de hoogte van de betaling vaak onzeker en kan afhangen van toekomstige ontwikkelingen (zoals de koers van een bepaald aandeel volgend jaar). In grote lijnen kunnen opties ingedeeld worden in *Europese* en *Amerikaanse*. We noemen een optie Europees wanneer deze een bepaalde betaling uitkeert op een *vast* tijdstip in de toekomst. Bij een Amerikaanse optie kan de koper op *ieder moment* tot een vast eind-tijdstip het contract uitoefenen.

De waardering van opties is een van de belangrijkste vragen die bestudeerd wordt in de financiering. Wat is een eerlijke prijs voor een optie? Oftewel, hoe veel moet een koper van de optie aan de verkoper betalen zodat beiden tevreden zijn (en bijvoorbeeld geen van beiden winst kan behalen zonder risico te lopen)? In het geval van Amerikaanse opties komt nog een andere natuurlijke vraag op, namelijk wat is voor een koper het optimale moment om zijn Amerikaanse optie uit te oefenen?

In dit proefschrift bestuderen we deze vragen voor een aantal opties van Amerikaans type onder verschillende modellen voor de prijs van een aandeel. In het eerste hoofdstuk beschouwen we het klassieke model voor de prijs van een aandeel

$$S_t = S_0 \exp(X_t), \quad S_0 = \exp(x), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

waar $X_t = \sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$ een Brownse beweging W met drift $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ is. Onder dit model met de rente constant genomen, bekijken we een viertal opties van Amerikaans type, de call, put, de Russische optie en de integraal optie. Voor dit viertal leiden we de waarde af en bepalen het optimale moment om ze uit te oefenen. De opties waarvan we de oplossing hebben gegeven, zijn alle van perpetuele aard, dat wil zeggen ze verlopen nooit. Vanuit praktisch oogpunt lijkt dat niet erg bruikbaar, omdat opties in praktijk altijd eindige looptijd hebben. Echter, dankzij een schitterend idee van Peter Carr, is het

mogelijk opties met eindige looptijd te benaderen met een bepaalde rij opties van perpetueel type, een procedure die ook wel *Canadizing* wordt genoemd. We geven een wiskundig bewijs voor deze convergentie en berekenen voor de vier eerder genoemde opties de eerste benadering.

Uitgebreid empirisch onderzoek heeft naar voren gebracht dat het klassieke geometrische Brownse beweging model niet ideaal is voor de modellering van de aandelen prijs. Het model is niet in staat om bepaalde eigenschappen die typerend zijn voor financiële data, zoals zware staarten en asymmetrie van de verdeling, te reproduceren. Vandaar de zoektocht naar een model dat empirisch gezien beter presteert. Het idee is om de prijs van het aandeel nu te modelleren door middel van (1) waar X nu een Lévy proces is. Een Lévy proces is een stochastisch proces dat onafhankelijke, gelijk verdeelde incrementen heeft en waarvan de paden rechts-continu zijn en linker limieten hebben. De klasse van Lévy processen heeft een zeer rijke structuur, wat onder andere blijkt uit het feit dat de klasse in één-op-één verhouding staat met de klasse van oneindig deelbare verdelingen. In Hoofdstuk 2 introduceren we een nieuw model voor de prijs van het aandeel, het *phase-type Lévy proces*. Dit model is een sprong-diffusie waar de sprongen een samengesteld Poisson proces vormen en een verdeling hebben die van *phase-type* is. Dit model is enerzijds rijk genoeg omdat het ieder Lévy proces willekeurig dicht kan benaderen en anderzijds kunnen onder dit model vele opties analytisch geprijsd worden. We illustreren dit door het bepalen van de van de prijs van de perpetuele Amerikaanse put en de Russische optie.

In het derde en vierde hoofdstuk bestuderen we Lévy processen met sprongen in één richting. Voor deze klasse van Lévy processen bestuderen we *eerste passage* problemen: Wat is de kansverdeling van het eerste tijdstip dat het Lévy proces een bepaald niveau overschrijdt of een interval verlaat en zijn positie op dat moment? Dezelfde vraag beantwoorden we voor bepaalde *gespiegelde* Lévy processen. Ook geven we een vrij complete beschrijving van de *ergodische* eigenschappen van de overgangskansen van zulke gespiegelde Lévy processen. Daarbij bepalen we bijvoorbeeld hoe groot bij benadering de kans is dat zo'n gespiegeld Lévy proces pas na zeer lange tijd een eindig interval $[0, a)$ verlaat. De gevonden resultaten gecombineerd met martingaal technieken stellen ons in staat het optimale stop probleem op te lossen dat verbonden is met de waardering van de perpetuele Amerikaanse put en Russische optie. De gevonden resultaten in het tweede, derde en vierde hoofdstuk vinden daarnaast ook toepassing in de context van modellen voor verzekeringsrisico, wachtrijen en modellen voor het waterniveau in een dam.

Het laatste hoofdstuk, tenslotte, handelt over nutsmaximalisatie van een agent die actief is op een financiële markt. We beschouwen een algemeen model waarin prijzen van financiële producten worden gemodelleerd door semimartingalen en de agent voldoening verkrijgt uit zowel tussentijdse consumptie als zijn/haar vermogen op het eindtijdstip. In dit kader bewijzen we dat er voor de agent een optimale, nutsmaximaliserende manier bestaat om te consumeren, handelen en sparen en geven we een karakterisatie van zo'n optimaal plan.