

Samenvatting

Interne golven

Overall om ons heen zijn golven te vinden. De bekendste zijn wel die op het wateroppervlak. Golven danken hun bestaan aan een stabiel basisevenwicht. Als dat verstoord wordt gaat een teruggrijvende kracht werken om deze verstoring terug naar zijn evenwichtspositie te brengen. Maar de evenwichtspositie wordt voorbijgeschoten, en een tegengesteld gerichte teruggrijvende kracht gaat werken. Er ontstaat een golf. De aard van het basisevenwicht bepaalt de classificatie van de golven. Voor golven op het wateroppervlak bijvoorbeeld is deze teruggrijvende kracht de zwaartekracht, het zijn zwaartekrachtsgolven. Alleen de verstoring van de evenwichtspositie (energie) plant zich voort, de vloeistofdeeltjes zelf keren uiteindelijk terug naar hun rustpositie.

Minder bekend is dat er ook golven *door* de vloeistof lopen, zogenaamde *interne golven*. Deze golven hebben een maximale uitwijking in het interieur, het vloeistofoppervlak beweegt nauwelijks. Zij danken hun bestaan aan een stabiele gelaagdheid van de vloeistof. Het eenvoudigste voorbeeld is een glas gevuld met water en lichtere olie, waarbij golven op het grensvlak water-olie lopen, terwijl het oppervlak vrijwel in rust is. Voor een vloeistof die stabiel gelaagd is in dichtheid heten deze golven *interne zwaartekrachtsgolven* omdat de zwaartekracht (dan wel de opwaartse kracht) ten gevolge van dichtheidsverschillen de teruggrijvende kracht is. Interne golven in een vloeistof met lagen van duidelijk verschillende dichtheid worden ook wel grensvlakgolven genoemd. Maar ook continu gelaagde vloeistoffen, waarbij de dichtheid langzaam verandert, kunnen interne golven bevatten. Deze lopen schuin door de vloeistof ten opzichte van de richting van de zwaartekracht (vertikaal). Zij hebben de bijzondere eigenschap dat de hoek met de vertikaal waaronder de beweging zich voortplant alleen afhankelijk is van de verhouding tussen de frequentie van de golf en de zogenaamde Brunt-Väisälä-frequentie, die door het dichtheidsverloop bepaald is. De vloeistofdeeltjes trillen langs lijnen die deze hoek maken. Het golfveld zelf kan daarmee als tweedimensionaal worden opgevat.

Een homogene, maar uniform roterende vloeistof kan ook in zekere zin gelaagd zijn. Vloeistof die verder van de rotatie-as is, moet een hogere snelheid hebben om in dezelfde tijd een omwenteling gemaakt te hebben dan vloeistof met een kleinere straal. De vloeistof is gelaagd in impulsmoment (snelheid maal straal). Deze gelaagdheid is radieel. Als een kleine hoeveelheid vloeistof uit zijn evenwichtspositie gebracht wordt heeft het een ander impulsmoment dan zijn nieuwe omgeving en zal een relatieve snelheid hebben. Ten gevolge

van een traagheidskracht, die in een met de vloeistof meeroterend coördinaatstelsel bekend is als de Corioliskracht, zal het vloeistofdeeltje langs cirkelvormige banen gaan oscilleren ten opzichte van een waarnemer die meedraait met de uniforme rotatie. Deze golven worden *traagheidsgolven* of *inertiaalgolven* genoemd. Ook hier lopen de golven schuin door de vloeistof, met een hoek die nu bepaald wordt door de verhouding tussen de golffrequentie en de rotatiefrequentie. Door de cirkelvormige deeltjesbeweging wordt het golfveld intrinsiek driedimensionaal.

Interne zwaartekrachtsgolven en de traagheidsgolven hebben eigenschappen die nauw verwant zijn. In een vloeistof die uniform roteert en gelaagd is in dichtheid zijn de beide soorten interne golven gecombineerd in één soort golf. Deze golven worden algemeen waargenomen in meren, zeeën en oceanen, die ook bestaan uit dichtheidsgelaagde, roterende vloeistoffen. Een gedeelte van de grootschalige getijstromingen wordt omgezet in interne golven (interne getijden) wanneer deze stromingen over de continentale helling of oceanische ruggen gericht zijn. De interne getijden kunnen op hun beurt door reflectie aan de hellende bodem tot locale menging leiden. Hoeveel en waar menging plaatsvindt is weer van belang voor de grootschalige stromingen. Maar ook voor het interieur van sterren en de vloeibare buitenkern van de aarde kunnen interne golven van belang zijn. Hier kunnen zij bijvoorbeeld worden opgewekt door zware diepe aardbevingen of kleine bewegingen van de rotatie-as.

Zoals gezegd lopen de interne golven schuin door de vloeistof. De paden waarlangs de golfenergie door de vloeistof loopt worden ook *golfstralen* genoemd. De vier mogelijke richtingen vanuit een punt vormen in een zijaanzicht een zogenaamd Andreaskruis. Als een golf reflecteert, veranderen de achtergrondgelaagdheid en de golffrequentie niet, zodat de gereflecteerde golf nog steeds onder een van deze richtingen moet wegelopen. Dit heeft vooral consequenties voor reflectie aan een schuine wand (niet parallel aan een van de symmetrieassen van het Andreaskruis). Na reflectie komen twee golfstralen ofwel dichter bij elkaar, resulterend in een sterkere beweging van de vloeistof (*focussering*) of raken juist verder van elkaar, waarbij de beweging zwakker wordt (*defocussering*).

Golfpatronen in twee dimensies

In dit proefschrift wordt het gedrag van reflecterende interne golven in afgesloten bekkens onderzocht. In eerste instantie werd gekeken naar golven in een oneindig lang kanaal, die niet in de kanaalrichting lopen. Een beschrijving in een doorsnede volstaat dan, wat het vinden van golfpatronen aanzienlijk vereenvoudigt. Omdat de vrijheid in voortplantingsrichting ernstig beperkt is, zal herhaalde reflectie aan de wanden van het kanaal niet leiden tot chaotische patronen zoals voor het klassieke 'biljartprobleem', waarbij alle richtingen mogelijk zijn, maar juist tot gestructureerde patronen. Het meest bekend zijn de oplossingen in termen van *staande golven*, waarbij alle golfstralen na een eindig aantal reflecties op zichzelf terugkomen (golfstralen zijn periodiek). De oplossingen kunnen dan geschreven worden als som van golven die precies passen in deze doorsnede. Bij een kleine verandering van de voortplantingsrichting of de vorm van het kanaal passen deze patronen niet meer en kan alleen de nuloplossing gevonden worden. Bij verdere veranderingen kan weer een nieuwe staande golf bestaan, met golfstralen die na een ander aantal reflecties op zichzelf terugkeren.

Het kan ook voorkomen dat slechts een beperkt aantal periodieke stralen bestaat. Nu lo-

pen de stralen in de richting van deze paar periodieke banen door herhaalde focussing aan de wanden. Deze periodieke banen fungeren als ‘limietbanen’ of *aantrekkers*, en alle energie raakt geconcentreerd rond deze aantrekkers. Deze concentratie kan vervolgens leiden tot het breken van golven als de beweging te sterk wordt, of op een andere manier leiden tot het lokaal mengen van de vloeistof. Voor een roterende vloeistof kan deze menging leiden tot een netto stroming. Zulke aantrekkers zijn minder gevoelig voor verandering van voortplantingsrichting en vorm van het kanaal, zij bestaan over *intervallen* van richtingen en vorm. Ook hier geldt dat de patronen bij te grote verandering niet meer passen, en dat voor een grotere verandering periodieke banen met een ander aantal reflectiepunten worden gevonden.

De achterliggende vergelijking die de hierboven beschreven patronen bepaalt is de golfvergelijking in twee ruimtelijke dimensies. De tijd kan buiten beschouwing gelaten worden door steeds golven van één frequentie te bekijken, zodat het patroon slechts bepaald wordt door de mogelijke voortplantingsrichting (afhankelijk van de frequentie) en de vorm van het kanaal. Ondanks de ogenschijnlijke eenvoud van het probleem is het niet eenvoudig om oplossingen van de golfvergelijking en daarmee patronen te vinden. Voor een kanaal met rechte wanden of een buis kan de vergelijking opgesplitst worden in twee nog eenvoudiger vergelijkingen: één voor elke ruimtelijke coördinaat, waarvoor de oplossingen eenvoudig aan de randvoorwaarden (geen beweging door de rand) kunnen voldoen. Dit geeft dan de staande golven. Als een kanaal echter hellende wanden heeft kan deze scheidingsmethode niet gebruikt worden, omdat dan de randvoorwaarde op een combinatie van deze coördinaten toegepast moet worden.

Een alternatief is dan om een oplossing te *construeren* door voor elk punt in de doorsnede te berekenen waar de stralen door dit punt de rand snijden. De druk op de rand bepaalt wat voor druk er door deze golfstralen naar het binnenste wordt doorgegeven. De druk op de rand wordt weer bepaald door de manier van opwekken van golven. In de wiskunde wordt een dergelijke methode, waarbij gekeken wordt naar het gedrag van de oplossing langs specifieke lijnen de *methode van karakteristieken* genoemd. Een complicatie voor een doorsnede van een kanaal is dat als er periodieke banen zijn, de druk aan de rand ook periodiek moet zijn. Alleen specifieke drukverdelingen zorgen dat er geen strijdigheden ontstaan. De methode van karakteristieken wordt dan ook meestal toegepast in tijdafhankelijke problemen, waar een golfstraal nooit terugkomt op hetzelfde punt in tijd en ruimte. In het onderhavige geval kunnen dergelijke complicaties waarschijnlijk ook gerepareerd worden door het volledige tijdafhankelijke probleem te beschrijven. Omdat het beschrijven van de ruimtelijke patronen alleen al moeilijk genoeg is wordt in dit proefschrift de aandacht daarop gericht.

Een voor de hand liggende vraag is of er iets bijzonders is met een bekkenrand om aantrekkers mogelijk te maken, afgezien van een helling die de symmetrie ten opzichte van het Andreaskruis breekt. Zulke bijzonderheden zijn bijvoorbeeld hoeken, waar de rand niet meer glad is, of uitstulpingen naar binnen toe. Om deze vraag te beantwoorden is in hoofdstuk 2 een speciale rand gekozen. Deze rand bevatte geen hoeken en instulpingen, en varieerde tussen een cirkel (uiterste geval) en een driehoek (uiterste geval), afhankelijk van een storingsparameter. Voor de cirkel is bekend dat er geen golfaantrekkers mogelijk zijn: of alle golfstralen zijn periodiek, of alle golfstralen blijven reflecteren zonder ooit op zichzelf terug te keren, voor de driehoek reflecteren de golfstralen richting de hoekpunten, waaruit ze niet kunnen ontsnappen. Wiskundigen zien reflectie in een gesloten gebied als een afbeelding van de rand van dit gebied op zichzelf. Om het gedrag te beschrijven werd gebruik gemaakt van

de theorie die hiervoor bekend is.

Golfstralen met verschillende voortplantingsrichtingen (frequenties) werden numeriek gevolgd over een groot aantal reflecties en de eventuele convergentie naar een aantrekker werd in kaart gebracht. Golfaantrekkers werden inderdaad algemeen gevonden. Het aantrekken was sterker naarmate de vorm meer verwant was aan de driehoek. De randen van de intervallen werden gevormd door frequenties waarvoor kritieke punten (punten waar de raaklijn aan de rand parallel is aan de golfstraal) met elkaar werden verbonden door een golfstraal, zodat de aantrekker degenereerde tot een lijn, en door frequenties waarvoor twee aantrekkers, die elkaars spiegelbeeld waren, samenvielen en elkaar annihilieerden. Aan de randen van deze intervallen ging het aantrekken nog maar heel langzaam. Er was één frequentie die door een extra symmetrie voor alle randparameters leidde tot een staande golf. Als deze symmetrie verstoord werd door de bekkenrand iets te draaien verdween deze staande golf, en veranderde de ordening van de frequentie-intervallen met betrekking tot de periode van de aantrekker (aantal reflecties van de periodieke baan die de aantrekker vormt). Ook werd met eerste orde storingstheorie (waarmee je het effect van kleine veranderingen bekijkt) gekeken naar het bestaan van aantrekkers voor algemene randen die gezien kunnen worden als kleine verstoringen van de cirkel. Voor de bekeken kanaalrand moest het breder worden van een frequentie-interval van de eenvoudigste aantrekker met het groter worden van de rand-storingsparameter worden beschreven met tweede orde storingstheorie (nog kleinere veranderingen bekijken). Het ontbreken van hoeken en uitstulpingen leidde niet tot de afwezigheid van aantrekkers, maar wel tot het ontbreken van sprongen of oneindigheden in de sterkte van de aantrekker.

Golfpatronen in drie dimensies

In drie dimensies wordt het ruimtelijke patroon van inwendige golven nog moeilijker te beschrijven dan in twee dimensies. Voor de zogeheten Poincarévergelijking, de golfvergelijking in drie ruimtelijke coördinaten, geldt weer dat alleen voor de eenvoudigste vormen van het bekken (een cylinder, bol of rechthoekige bak) oplossingen gevonden kunnen worden door de vergelijking op te delen in eenvoudigere vergelijkingen. De methode van karakteristieken kan nu niet gebruikt worden, en de wiskundige ‘opvolger’, geschikt voor vergelijkingen voor twee ruimtelijke dimensies en de tijd, leidt tot te grote complicaties wat betreft voorwaarden voor de druk op de rand.

Als hulpmiddel werd weer naar golfstralen gekeken. Deze kunnen weliswaar niet gebruikt worden om een volledige oplossing te construeren, zoals in twee dimensies, maar geven wel ondersteuning bij het vinden van mogelijk gedrag. Uit stralentheorie volgt dat golfstralen hun hoek met de richting van de zwaartekracht en/of de rotatie-as moeten behouden. In drie dimensies betekent dat dat golven langs kegels lopen waarvan de tophoek bepaald wordt door de golffrequentie en de dichtheidsverdeling en/of de rotatiesnelheid. De hoek in het horizontale vlak is echter vrij. Bij reflectie aan een schuine wand zal de golf dan ook niet alleen reflecteren zoals hiervoor beschreven, maar in horizontale richting ook breken, wat wil zeggen dat de gereflecteerde golf een andere hoek maakt in het horizontale vlak dan de inkomende.

Focuserende reflectie gaat vergezeld van breking, zodanig dat de gereflecteerde golf-

straal een kleinere hoek maakt met een doorsnede van het kanaal dan de inkomende. Voor frequenties waarvoor een tweedimensionale aantrekker werd voorspeld kunnen daarom ook in drie dimensies golfstralen naar een aantrekker gaan. Op welke positie in de kanaalrichting de aantrekker bereikt wordt is echter sterk afhankelijk van de startpositie en aanvankelijke hoek in het horizontale vlak. Voor een situatie waarin in twee dimensies een staande golf zou ontstaan zal een golf die begint met een component van voortplanting in de horizontale richting niet convergeren naar een vaste positie, daar de balans tussen focussing en defocussing ook een balans tussen convergentie en divergentie in de horizontale richting geeft.

Het is echter niet mogelijk om een echte oplossing te vinden door naar individuele stralen te kijken. Ook de interactie tussen golfstralen, zoals versterking en uitdoving, moet meegenomen worden om het golfveld adequaat te beschrijven.

Laboratoriumobservaties

Om de voorspellingen van aantrekkers te verifiëren en om de driedimensionale structuur van het golfveld te bestuderen zijn laboratoriumexperimenten uitgevoerd. Een langwerpige, rechthoekige bak werd voorzien van een hellende zijwand om een aantrekker mogelijk te maken. Deze bak werd gevuld met kraanwater en zeer kleine zwevende bolletjes voor de visualisatie. De bak werd op een roterend platform geplaatst, waarbij de rotatiesnelheid regelmatig gevarieerd werd rond een basisrotatie om inertiaalgolven op te wekken met een frequentie gelijk aan de frequentie van de regelmatige variatie. Door in een verduisterde ruimte een dun vlak in de vloeistof te belichten en dit te registreren met een digitale camera werd de beweging vastgelegd. Met beeldverwerkingsprogramma's werden deze beelden door de computer vertaald naar tweedimensionale snelheidsvelden. Verscheidene golffrequenties werden gebruikt om verscheidene aantrekkers en een staande golf op te wekken. Metingen werden in verschillende horizontale en verticale vlakken verricht om een ruimtelijk beeld van het golfveld te verkrijgen. Twee reeksen van experimenten zijn gedaan: één in een grote bak (breedte×lengte×hoogte=107×500×80 cm) op het 13 m diameter roterend platform van het Coriolislaboratorium in Grenoble (Frankrijk) en een in een veel kleinere bak (19×40×19,5 cm) op een 1 m diameter roterend platform in het Vloeistofdynamisch Laboratorium van de Technische Universiteit Eindhoven.

In de eerste reeks van metingen (hoofdstuk 3) zijn zes verschillende frequenties onderzocht: vier binnen het frequentie-interval van de eenvoudigste aantrekker, waarvan twee rond het midden en twee aan de rand van het interval, één waarvoor een staande golf verwacht werd en één voor een iets gecompliceerdere en zwakkere aantrekker. Alle voorspelde vormen zijn waargenomen. Voor de theoretisch sterkste aantrekkers was de beweging het sterkst, voor de staande golf was deze zwakker en de gecompliceerdere aantrekker was niet in zijn geheel zichtbaar als baan van versterkte beweging. De staande golf onderscheidde zich inderdaad in fasegedrag in de verticale doorsnedes: de beweging veranderde uniform van fase, terwijl voor de aantrekkers de fase zich voortplantte in het vlak van observatie. In de horizontale richting nam de bewegingssterkte voor de sterke aantrekkers af met het naderen van het midden van de tank. Voor de zwakke aantrekkers en de staande golf werd de beweging weer wat sterker naar het midden toe. Voor de aantrekker waarvoor de golfstralen parallel aan de hellende wand liepen (kritische reflectie) was er sprake van faseveranderingen naar het midden toe

met een golflengte van $1/4$ tot $1/5$ van de baklengte, voor de andere aantrekkers en de staande golf werd dit niet waargenomen of kon dit niet goed geobserveerd worden door technische beperkingen van het experiment.

In de tweede reeks experimenten (hoofdstuk 4) kon de variatie in de horizontale richting beter bestudeerd worden, omdat het hele horizontale vlak tegelijk in beeld gebracht kon worden. Nu werden slechts drie frequenties onderzocht, behorend bij kritische reflectie, een eenvoudige aantrekker en een staande golf. Opnieuw werd fasevoortplanting in de horizontaal gevonden voor de kritische reflectie. Voor de eenvoudige aantrekker werd gedrag gelijkend op dat van een staande golf gevonden in de horizontaal, met een aantrekker die duidelijk zichtbaar was op $1/4$ en $3/4$ van de lengte, maar nauwelijks nabij de uiteinden van het kanaal en halverwege. Halverwege was er een fasesprong, de twee gedeeltes waren in tegenfase. Dit suggereert een staande golf met een knooplijn in het midden als structuur in de lengterichting. Voor de staande golf werd geen voortplanting in de horizontaal gevonden, de beweging was het sterkste rond het midden, de fasestructuur suggereert de laagste orde staande golf in de lengterichting.

De puur wiskundige aantrekker, met alle energie geconcentreerd op een lijn, is fysisch niet mogelijk. Lineaire golven geven een goede beschrijving van het verschijnen van een aantrekker, maar waar energie geconcentreerd raakt gaan andere processen van belang worden. Het blijkt dat bij de aantrekker niet-lineaire termen een rol gaan spelen, namelijk een term die gevormd wordt door de snelheid maal de ruimtelijke verandering van de snelheid (niet-lineaire advection van snelheid). Deze blijkt te zorgen voor het evenwicht tussen focussering en verlies van snelheid en bepaalt daarmee de eindige dikte van de aantrekker.

Observaties van interne getijden in het Mozambiquekanaal

De wanden van meren en zeeën zijn veelal hellend. Naar menselijke maatstaven zijn deze hellingen flauw, maar ten opzichte van de voortplantingsrichting van interne golven in deze bekkens is dat zeker niet het geval. Focusering zou dus ook hier tot het ontstaan van golf-aantrekkers kunnen leiden. Hoewel interne getijden in de oceaan algemeen waargenomen worden is er slechts weinig bekend over hun ruimtelijke verdeling op regionale schaal, behalve dan vlak bij de continentale helling. In hoofdstuk 5 worden waarnemingen beschreven uit het Mozambiquekanaal, een zeestraat tussen Mozambique en Madagascar. Het heeft een redelijk sterk getij (oppervlaktegetij ongeveer 1 meter) en sterke topografie (ongeveer 400 km breed, 2500 m diep). Het grootste gedeelte van de metingen bestaat uit stroomsnelheden en -richtingen, uit stroommeters die in totaal ruim anderhalf jaar hebben gemeten op diverse plaatsen in het kanaal. Ook zijn tijdens de vaartochten in het kanaal profielen bepaald van o.a. temperatuur en zoutgehalte van het water.

Interne getijden zijn inderdaad waargenomen in het Mozambiquekanaal. Kenmerkend is dat zij niet permanent aanwezig zijn, ze worden onregelmatig sterker en zwakker. Dit zou veroorzaakt kunnen worden door veranderingen in gelaagdheid en het scheef staan van de kabels met stroommeters in de periodes dat een warmere wervel door het kanaal trekt. Dit zorgt voor veranderingen in de paden van golven met de frequenties van het zons- en maansgetij en de positie van stroommeters ten opzichte van deze paden. De variatie was echter zo groot dat deze niet direct gerelateerd kon worden aan de wervels.

Om het langetermijngedrag te bepalen is de bewegingsenergie met frequenties rond de getijfrequenties bepaald voor iedere stroommeter. De sterkste beweging is gevonden voor de bovenste stroommeters, rond de pycnocliene (diepte-interval waarin de dichtheid snel verandert met de diepte, hier voornamelijk als gevolg van de sterke temperatuurverandering). Deze resultaten zijn vergeleken met een numeriek model dat getijden genereert door een stroming over de bodemtopografie voor te schrijven. De gelaagdheid in dit model is gebaseerd op de gemeten profielen van temperatuur en zoutgehalte. Uit het getijgeneratie-model blijkt ook dat de interne getijstromingen het sterkst zijn rond en boven de pycnocliene. De pycnocliene zorgt voor extra reflecties en verstrooiing van interne golven, wat in een stralenmodel niet aanwezig is.

Een aantrekker is hiermee niet waargenomen. Maar men moet niet vergeten dat in de oceanografische praktijk slechts puntmetingen beschikbaar zijn, terwijl in het laboratorium een heel vlak bekeken kon worden. Uit het numeriek model blijkt bijvoorbeeld wel duidelijk dat er gebieden zijn met sterkere en minder sterke interne getijden, waar geen metingen beschikbaar waren. Verder zijn het niet noodzakelijk de getijfrequenties die tot de sterkste en eenvoudigste aantrekkers leiden, dat hangt geheel van de gelaagdheid en de bekkenvorm af. Het is waarschijnlijk dat er in de praktijk op zijn minst rudimenten van golfaantrekkers te vinden zijn in de vorm van geïsoleerde plekken met sterke inwendige getijden die niet als golven rechtstreeks afkomstig van een generatiegebied te interpreteren zijn. In dit licht bezien kan dit proefschrift, met al zijn beperkingen, bijdragen aan inzicht in het gedrag van interne golven in de oceaan.