

# Samenvatting

Als inleiding op de samenvatting van dit proefschrift is het nuttig om eerst een kort overzicht te geven van de stand van zaken in de wiskunde ten tijde van Brouwers promotie in 1907.

Brouwer studeerde en promoveerde in een periode van grote veranderingen in deze meest abstracte tak der wetenschap. De verzamelingenleer van Cantor was slechts enkele decennia oud en ook het werk van Dedekind was nog steeds zeer actueel. Van nog recenter datum waren de publicaties van Frege, Russell, Poincaré, Borel en Hilbert. Van deze laatste stamt de lijst van 23 nog op te lossen ‘Mathematische Probleme’, gepresenteerd in 1900 te Parijs tijdens de grote internationale wiskunde conferentie aldaar. In diezelfde jaren rond de eeuwwisseling ontstond grote beroering toen ontdekt werd dat paradoxen mogelijk bleken te zijn in de recent ontwikkelde verzamelingenleer. Met name de paradox van Russell bracht iemand als Frege in grote verwarring.

Maar men was reeds daarvoor, gedurende de tweede helft van de negentiende eeuw, in verschillende richtingen op zoek naar een solide fundering voor de wiskunde:

- Het *logicisme* trachtte alle wiskunde te funderen op, en af te leiden uit, de logica alleen. Protagonisten hierin waren Frege in Duitsland, Russell in Engeland en Couturat in Frankrijk.

- Het *formalisme* stelde dat wiskunde slechts bestaat uit het manipuleren met symbolen volgens tevoren vastgelegde regels. Hierbij moet niet aan inhoud of interpretatie gedacht worden. Hilbert speelde in deze stroming een grote rol.

- Een tegenstroming ontstond door het werk van Poincaré en Borel, die stelden dat er meer is dan vorm, logica en taal. Volgens deze Franse ‘pre-intuitionisten’ is logica slechts geschikt ter controle achteraf van de juistheid van een redenering, maar levert wiskundig gezien niets nieuws op. Ook taal is een noodzakelijk hulpmiddel om wiskundige redeneringen met anderen te kunnen communiceren, maar is zelf niet een bron voor wiskunde. Er is meer nodig dan logica en taal: er is wiskundige *intuïtie* vereist, die ons uit de veelheid van definities en axioma’s de juiste doet kiezen en die ons de richting doet aanvoelen waarin de oplossing van een probleem gezocht moet worden.

De Aristotelische logica, en in het bijzonder het syllogisme, brengt ons, zo stelt Poincaré, nooit van het particuliere naar het algemene. Het wiskundig middel dat ons daar wel toe in staat stelt is het onbewijsbare en intuïtief aangevoelde werktuig van de volledige inductie. Echter, als criterium voor de existentie

van een wiskundig object hanteerden de Franse pre-intuitionisten nog niet de strenge eis van construeerbaarheid die Brouwer stelde. Voor Poincaré bestaat een mathematisch object als het vrij is van interne contradictie in het relevante wiskundige systeem; voor Borel is het criterium van existentie van een wiskundig object een met andere wiskundigen gedeelde vertrouwdheid ermee.

Dit proefschrift behandelt de beginperiode van de grote rol die de nog jonge Brouwer zou gaan spelen in de tegenbeweging tegen formalisme en logicisme. Zijn dissertatie *‘Over de Grondslagen der Wiskunde’*, verdedigd in 1907, kan gezien worden als een aanloop naar zijn Intuitionisme. Hoewel dit Intuitionisme pas tot volle ontwikkeling kwam vanaf 1918, zien we in zijn proefschrift, en in nog grotere mate in een aantal aantekenschriften voor dit proefschrift, al duidelijk een grote hoeveelheid, in de richting van zijn latere ontwikkeling wijzende, ideeën.

De volgende van deze ideeën, die ook in zijn latere werk kenmerkend voor Brouwer zullen blijven, zijn in de voorgaande hoofdstukken uitvoering behandeld:

–1– *De essentiële taalloosheid van de wiskunde.* Wiskunde is een schepping van de individuele menselijke geest, en de rol van taal hierbij is slechts die van een gebrekkig hulpmiddel voor communicatie met anderen en voor het oproepen uit het eigen geheugen van die schepping. Een probleem hierbij is dan dat van de intersubjectiviteit.

–2– *De oer-intuïtie* als de meest fundamentele basis van alle wiskunde. Deze oer-intuïtie is de ‘tijdsbeweging’, de gewaarwording van het niet-samenvallen van ervaren gebeurtenissen, van de ervaring van een ‘tijdscontinuüm’ tussen die twee gebeurtenissen. In tegenstelling tot Kant, die ruimte *en* tijd beide als ‘Anschauungsformen’ poneerde ter fundering van de aprioriteit van respectievelijk meetkunde en rekenkunde, had Brouwer aan de oer-intuïtie van de tijdsbeweging genoeg.

–3– Een *strict constructivisme*. Alleen dat wat vanuit de oer-intuïtie volgens een tevoren vastgesteld algoritme of constructiemethode door de geest kan worden opgebouwd, telt als wiskundig object of als stelling (relatie tussen objecten); in Brouwers terminologie: als wiskundig gebouw.<sup>52</sup>

–4– *De rol van de logica* is slechts een begeleidende, alleen nuttig voor een effectieve en beknopte beschrijving van een mentale wiskundige constructie. Logica komt *na* wiskunde, in plaats van er een basis en uitgangspunt voor te zijn.

–5– Een *stelsel axioma’s* als fundament voor een wiskundige constructie wordt afgewezen. Er is slechts één basis en fundament en dat is de eerder genoemde oer-intuïtie. Axioma’s hebben slechts de dienende functie van het beknopt weergeven van de voornaamste kenmerken van een gebouw.

Deze uitgangspunten hebben voor de op te bouwen wiskunde verstrekkende gevolgen, die door Brouwer worden beschreven in zijn dissertatie. De beschrij-

<sup>52</sup>Dit constructivisme zal echter in zijn intuitionistische wiskunde een geheel andere vorm krijgen.

vingen en uitwerkingen van die gevolgen zijn echter vaak dermate beknopt weergegeven, dat in vele gevallen een uitvoerige interpretatie vereist is. Deze interpretaties zijn in de voorafgaande hoofdstukken uitgebreid uitgewerkt en met voorbeelden toegelicht. We noemen er enkele:

- Slechts eindige of aftelbaar oneindige verzamelingen bestaan. ‘Aftelbaar oneindig’ wil zeggen dat de elementen op systematische wijze één voor één geteld kunnen worden zonder een enkele over te slaan. Elk aanwijsbaar element van een dergelijke verzameling kan van een uniek natuurlijk getal voorzien worden en, omgekeerd, elk natuurlijk getal van een element. Dit houdt in dat oneindige verzamelingen bestaan in intensionele zin, echter niet extensioneel. Brouwer verzette zich hier tegen Poincaré, voor wie het oneindige geheel ondenkbaar was. Maar uit de aantekenschriften en uit de dissertatie blijkt dat Brouwer soms het bestaan van het oneindige stelt, maar dit op andere plaatsen juist weer ontkent. Dit vereist steeds een interpretatie, die echter telkens met goede argumenten mogelijk blijkt.

- Het continuüm (een tijdsverloop of een rechte lijn) bestaat niet uit punten, maar is ons als geheel direct gegeven uit de oer-intuïtie. Hierbij is het tijdscontinuüm primair. Dit niet-atomair zijn van het continuüm is overigens een opvatting die reeds door Aristoteles verdedigd werd. Het continuüm kan tot een ‘meetbaar’ continuüm gemaakt worden door er een ‘overal dichte rationale schaal’ van punten op te *construeren*, waarbij het ‘dicht’ maken van deze schaal een van de voorbeelden is van een vrije creatieve act van de menselijke geest, zoals heel de opbouw van de wiskunde het resultaat is van een vrije menselijke schepping. Volgens Brouwer zijn er echter daarna *altijd* weer opnieuw meer punten te construeren op een continuüm met een reeds overal dichte schaal erop, hetgeen voor hem aanleiding was om zijn concept ‘aftelbaar oneindig onaf’ te introduceren.

- Cantors tweede en hogere getalklassen bestaan voor Brouwer niet, omdat er geen algoritme bestaat dat alle elementen van die klassen doet ontstaan zodanig dat deze als één af geheel kan worden gezien. Er is geen afsluiting van die hogere klassen denkbaar, zoals dit wel denkbaar is voor de eerste getalklasse (de natuurlijke getallen) in de vorm van  $\omega$ , het eerste element van de tweede getalklasse.

- Het door Cantor gestelde ‘continuüm probleem’ (i.e. op welke plaats in de hiërarchie van de kardinaalgetallen staat het systeem van de reële getallen, en de daarbij uitgesproken ‘continuüm hypothese’ dat de verzameling van alle reële getallen gelijkmachtig is met de tweede getalklasse) heeft, als gevolg van Brouwers constructivisme, een bijzonder eenvoudige oplossing.

Dit proefschrift behandelt uitdrukkelijk niet in expliciete zin Brouwers latere intuïtionistische wiskunde, die van keuzerijen, van verzamelingen als ‘spreiding’ en ‘species’, van de continuïteitsstelling en van het ‘bar-theorema’, wat allemaal pas na 1918 tot volle ontwikkeling kwam. Maar sommige aspecten hiervan komen al min of meer duidelijk ter sprake in de eerder genoemde aantekenschriften die een aantal jaren geleden teruggevonden werden, maar waarvan het bestaan al veel eerder bekend was. In deze schriften zijn vele fragmenten te

vinden die er duidelijk op wijzen dat Brouwer zoekende was in de richting van de later ingeslagen weg. Dankzij de inhoud van de schriften zijn ook veel fragmenten in de dissertatie te interpreteren in intuïtionistische zin.

Ten slotte is ook in de voorgaande hoofdstukken Brouwers kijk op de samenleving ter sprake gekomen. Dit is een facet in zijn denken waar niet omheen gegaan kan worden omdat dit een steeds terugkerend thema is in zijn werk, zij het dat in latere tijd de toon aanmerkelijk milder wordt. In een van zijn eerste publikaties, *Leven, Kunst en Mystiek* uit 1905, ontstaan uit een serie lezingen die Brouwer in Delft hield, komt een uiterst pessimistisch mensbeeld naar voren. We vinden dit terug op vele plaatsten in de aantekenschriften: elk ingrijpen van de mens in de natuur met behulp van wiskundige 'causale reeksen' is een zondige activiteit; het leidt tot 'externalisatie' terwijl de mens volgens Brouwer moet inkeren tot zichzelf; deze opvatting is terug te vinden in het tweede hoofdstuk van zijn dissertatie. Hoewel de door hem geschetste werkwijze van het natuurkundig onderzoek een reële weergave van die praxis is, is het doel van natuurkundig onderzoek volgens Brouwer slechts het beheersen van natuur en medemens. Daarom velst hij er op morele gronden een negatief oordeel over: de mens onderzoekt de natuur slechts om zijn macht te vergroten over die natuur en daarmee over zijn medemens. Het lijkt ons dat een fysicus, die zo denkt over zijn terrein van onderzoek, daarvan wel invloed *moet* ondervinden in zijn werkwijze en resultaten.

Maar laat ons deze samenvatting besluiten met de constatering dat de werkelijke betekenis van het werk van Brouwer ligt in de schoonheid en de originaliteit van zijn totaal nieuwe opbouw van de wiskunde en de filosofische onderbouwing daarvan. Deze opbouw geschiedt op zeer consequente en strenge wijze, geheel op basis van de menselijke oer-intuïtie van de van alle inhoud geabstraheerde tijdsbeweging. Deze vergaande abstractie kan men hanteren als één van de argumenten bij de benadering van het probleem der intersubjectiviteit.