
Samenvatting

1 Inleiding

In de huidige informatiemaatschappij heeft iedere burger enige statistische geletterdheid nodig. In veel beroepen en takken van wetenschap is zelfs een goede statistische kennis vereist. Het onderwijs slaagt er over het algemeen niet in om leerlingen een goede statistische basis te geven. Zo blijkt uit veel buitenlands onderzoek dat leerlingen de statistische grafieken en begrippen die ze geleerd hebben meestal niet goed kunnen gebruiken bij het analyseren van data. Er is daarom behoefte aan een empirisch onderbouwde instructietheorie die aangeeft hoe leerlingen een bepaald domein kunnen leren. Het doel van het hier beschreven onderzoek is om bij te dragen aan zo'n instructietheorie voor aanvankelijke statistiek. Daartoe is al een aanzet gedaan door Cobb, McClain, Gravemeijer en hun team aan de Vanderbilt University, Nashville, TN, USA. Het onderhavige onderzoek is hier een vervolg op.

De methode die hier gehanteerd wordt is ontwikkelingsonderzoek (*design research*). Dit houdt kort gezegd in dat er in een cyclisch proces een leertraject wordt ontworpen, in klassensituaties getoetst en waar nodig aangepast op grond van retrospectieve analyses. In het begin van een ontwikkelingsonderzoek heeft de voorlopige instructietheorie nog een hypothetisch karakter, maar door de cyclische doordenking en beproeving wordt de zich ontwikkelende instructietheorie steeds beter empirisch onderbouwd. In dit onderzoek staan twee onderwerpen centraal: symboliseren en het gebruik van computertools.

Symboliseren. In de statistiek spelen grafieken een centrale rol, maar zonder geschikte concepten kunnen leerlingen deze niet goed interpreteren, selecteren of produceren. Vanuit een semiotisch perspectief geformuleerd is het zaak dat grafieken een symboolfunctie krijgen: ze moeten in de ogen van leerlingen gaan staan voor statistische objecten, bijvoorbeeld voor de frequentieverdeling van een dataverzameling. Onder de noemer van symboliseren wordt dit proces geanalyseerd.

Computertools. Zonder computerprogramma's is het analyseren van data een uiterst bewerkelijk proces. Omdat de meeste statistische programma's niet geschikt zijn om statistiek mee te *leren*, wordt in dit onderzoek gebruikgemaakt van statistische minitools, die binnen het Nashville-onderzoek speciaal voor leerlingen van ongeveer twaalf jaar zijn ontworpen.

2 Achtergrond en onderzoeksvragen

Een van de belangrijkste uitgangspunten van het onderzoek is dat wiskunde leren een betekenisvolle activiteit moet zijn. De theorie van het realistisch wiskunde-onderwijs (RME) biedt hiervoor richtlijnen en ontwerpheuristieken. In plaats van kant-en-klare wiskunde aan te bieden die vervolgens wordt toegepast, wordt gestreefd naar een proces van geleid heruitvinden.

We hebben het onderzoek voorbereid in verschillende stappen. Na een literatuurstudie zijn de bevindingen van het Nashville-onderzoek samengevat. Ook is een historische studie gedaan naar de ontwikkeling van statistische concepten om ideeën op te doen voor de leergang. Vervolgens zijn exploratieve interviews gehouden met 26 Nederlandse brugklasleerlingen om het beginniveau voor de leergang vast te kunnen stellen. Dit geheel van bevindingen leidde tot een zogenaamde didactische fenomenologie die weer de basis vormde voor de eerste leergang. We vatten eerst de literatuurstudie en het Nashville-onderzoek samen.

Statistische data-analyse leidt tot de beschrijving en voorspelling van eigenschappen van *groepen* gegevens, niet van individuele gevallen. Uit de literatuurstudie van onderzoek naar statistiekonderwijs blijkt dat leerlingen het moeilijk vinden om kenmerken van een dataverzameling als een geheel te beschrijven. In plaats daarvan letten ze vooral op individuele gegevens. Verder blijken ze veel moeite te hebben met het interpreteren en gebruiken van grafieken waarin individuele gegevens samen-gevoegd zijn, zoals in een histogram of een boxplot.

Het kernbegrip in de statistiek waarmee patronen in variabele fenomenen en groeps-eigenschappen van dataverzamelingen gemodelleerd worden, is *verdeling*. Het uitgangspunt van het Nashville-onderzoek was dat leerlingen met een notie van verdeling beter in staat zouden zijn om groeps-eigenschappen te beschrijven en te voorspellen. Voor het onderzoek in de basisvorming denken we daarbij in het bijzonder aan de verdeling van data over een variabele. Omdat een formele definitie van bijvoorbeeld de normale verdeling te moeilijk is voor brugklasleerlingen, is er net als in het Nashville-onderzoek voor gekozen om de *vorm* van verdelingen centraal te stellen in het ontwerp van de leergang.

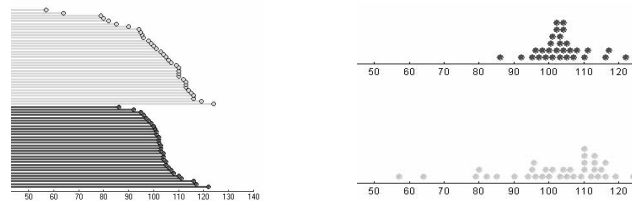


Figure S.1: Minitool 1 en 2 met dezelfde dataverzameling, de levensduur in uren van batterijen van twee merken

Voor het onderzoek in Nashville zijn drie Java-applets ontwikkeld die het leerproces van leerlingen moesten ondersteunen: de minitools. In de eerste minitool wordt iedere meetwaarde door een horizontale staaf weergegeven: de lengte is evenredig met de meetwaarde (Figuur S.1 links). In de tweede minitool zijn de eindpunten van die staven als het ware recht naar beneden gevallen. Hierdoor ontstaat een stippendia-gram (Figuur S.1 rechts), waarin bijvoorbeeld een normaal verdeelde dataver-

zameling ook te zien is als de bekende klokvorm. In de derde minitool kunnen leerlingen een *scatterplot* op verschillende manieren structureren, maar deze tool is in het onderhavige onderzoek niet gebruikt.

In het Nashville-onderzoek is het inderdaad gelukt om leerlingen te laten redeneren over groepeigenschappen van verdelingen, bijvoorbeeld via de vorm (“de heuvel zit hier meer naar links”, dus de meerderheid van de data was lager). Er waren echter ook nieuwe vragen, met name rond het gemiddelde en steekproeven, en het symboliseerproces. Op basis van de literatuurstudie en het Nashville-onderzoek is in het Nederlandse onderzoek gekozen voor de volgende onderzoeksvragen:

- 1 *Hoe kunnen leerlingen met weinig statistische achtergrond een begrip van verdeling ontwikkelen?*
- 2 *Hoe verloopt het proces van symboliseren als leerlingen over verdeling leren redeneren?*

3 Methodologie

Ontwikkelingsonderzoek bestaat in de regel uit cycli van drie fasen. In de eerste fase van een cyclus wordt een klassenexperiment voorbereid. Op basis van beschikbare kennis en ervaring wordt een hypothetisch leertraject uitgestippeld met een einddoel, lesmateriaal en verwachtingen over het leerproces van de leerlingen. In de tweede fase wordt het klassenexperiment uitgevoerd. Op basis van ervaringen in de klas kan het hypothetisch leertraject gedurende het klassenexperiment aangepast worden. In de derde fase wordt het leerproces geanalyseerd. Allerlei vragen kunnen onderzocht worden, bijvoorbeeld: zijn de verwachtingen uitgekomen? Welke aanpassingen zijn er nodig? Wat voor begrip van spreiding hebben leerlingen in een bepaalde context? Op basis van de retrospectieve analyse kan het hypothetisch leertraject gereviseerd worden voor een volgende cyclus. Het kenmerkende van ontwikkelingsonderzoek is dat steeds de meest kansrijke route gekozen wordt. Dit kan betekenen dat het hypothetisch leertraject aangepast wordt als het klassenexperiment nog niet is afgelopen. Er kunnen tijdens de tweede fase ook minicycli van analyse en revisie plaatsvinden.

Bij de retrospectieve analyse in klassen 1B (havo) en 2B (havo-vwo) hebben we bij episodes vermoedens geformuleerd die vervolgens aan de rest van de episodes en andere databronnen zijn getoetst. Dit proces van vermoedens genereren en toetsen is enkele keren herhaald volgens een methode die lijkt op de constant comparatieve methode van Glaser en Strauss (1967).

In het onderzoek zijn verschillende data verzameld om het leerproces van leerlingen te registreren: audio- en video-opnamen van leerlingen in de klas, leerlingmateriaal, toetsen en veldobservaties, maar ook audio-opnamen van reflectiegesprekken met de assistenten na afloop van iedere les (zie Tabel 3.3). Een belangrijk onderdeel van

het datacorpus vormde de verzameling mini-interviews die tot doel hadden om te achterhalen wat grafieken en begrippen voor leerlingen betekenden. De interviews werden gehouden in de klas aan de hand van vooraf vastgestelde vragen die met de assistenten werden doorgesproken. De lengte van de interviews varieerde van ongeveer twintig seconden tot vier minuten.

De audio- en video-opnamen van klassen 1B en 2B zijn getranscribeerd. De protocollen van 1B zijn in een computerprogramma voor protocolanalyse (Erkens, 2001) ingevoerd en gecodeerd op opgave, woorden en begrippen. Het doel hiervan was om de protocollen systematisch te analyseren, hypothesen te genereren en alle episodes die over een bepaald probleem of begrip gingen makkelijk terug te vinden om zo de hypothesen te testen. De protocollen van klas 2B zijn gecodeerd door de onderzoeker en deels met drie assistenten doorgesproken. Er was een hoge mate van overeenstemming over de codering.

4 Historische fenomenologie

Als voorbereiding op het ontwerp van een hypothetisch leertraject is onder andere een historische studie gedaan naar de ontwikkeling van enkele statistische representaties en kernbegrippen zoals gemiddelde, mediaan, steekproef en verdeling. Er is onderzocht welke fenomenen aanleiding gaven tot het ontstaan van statistische begrippen en hoe deze begrippen gebruikt zijn om fenomenen te organiseren. Op basis van de historische voorbeelden zijn hypothesen geformuleerd over het leren van die begrippen.

De eerste hypothese luidde dat schatten van grote aantallen een mogelijk geschikte context was om het gebruik van een impliciete notie van gemiddelde in relatie tot een totaal aantal te stimuleren. Een andere hypothese was dat leerlingen het bereikmidden, het gemiddelde van de twee extreme waarden, als centrummaat zouden gebruiken. Ook zijn er hypothesen over de mediaan, steekproef, verdeling en grafieken geformuleerd. De hypothesen die getoetst konden worden, werden bij de experimenten alle op één na bevestigd.

De historische analyse hielp het ontwerpproces op verschillende manieren. Ze bleek nuttig om aspecten van begrippen als het gemiddelde en steekproef te onderscheiden naar moeilijkheidsgraad, en hielp om beter door de ogen van leerlingen te kijken.

5 Exploratieve interviews en een didactische fenomenologie

Uit de analyse van de exploratieve interviews met 26 brugklassers bleek dat deze leerlingen het aritmetische gemiddelde redelijk goed konden berekenen. Ook verbonden ze aan het informele begrip 'gemiddelde' allerlei kwalitatieve eigenschappen zoals de meeste, ongeveer, balanspunt, bereikmidden, de middelste, zwaartepunt en meerderheid. Er leek echter een kloof te zijn tussen het aritmetische gemiddelde als algoritme en de kwalitatieve eigenschappen van het gemiddelde zoals dat in het dagelijks leven ook wel gebruikt wordt. Verder bleken twee voor-

beeldopgaven van het Nashville-onderzoek met minitool 1 en 2 ook voor de Nederlandse leerlingen geschikt te zijn.

Op basis van de literatuurstudie, de historische studie en exploratieve interviews is een analyse gemaakt van het begrip verdeling en andere statistische kernbegrippen. In lijn met het Nashville-onderzoek, werden leerlingen gestimuleerd om te leren beschrijven hoe data verdeeld zijn en uit de vorm van grafieken groepeigenschappen af te leiden. De verwachting was: als het begrip ‘verdeling’ voor leerlingen een objectkarakter krijgt, dan kunnen ze er ook eigenschappen van onderzoeken (centrum, spreiding, dichtheid, scheefheid). De vraag is alleen hoe het objectvormingsproces verloopt. De bestaande theorieën hierover gaan uit van een procedure die tot object wordt samengevat, maar in het geval van het begrip verdeling lijkt eerder sprake te zijn van een samengestelde eenheid (*composite unit*). Net als het getal 10 gedacht kan worden als tien eenheden en als een eenheid, kan een dataverzameling gezien worden als een collectie getallen maar ook als een eenheid met eigenschappen die de elementen van de collectie niet hebben.

Geïnspireerd door de historische voorbeelden van het gemiddelde dat vermoedelijk gebruikt werd om grote aantallen te schatten, besloten we de leergang met schatten te beginnen. We vroegen leerlingen eerst het aantal olifanten op een foto te schatten. Een verwante schattingsvraag was: hoeveel brugklasleerlingen mogen er in een ballon als er normaal gesproken acht volwassenen in mogen? Aan de hand van dergelijke vragen verwachtten we noties van gemiddelde en steekproef te kunnen bespreken.

Het hypothetisch leertraject, in één zin samengevat, was dat leerlingen zouden leren redeneren over verdelingsaspecten met steeds geavanceerdere grafieken en begrippen. De middelen die dit proces moesten ondersteunen waren de minitools, de activiteiten die in Nashville ontwikkeld waren, maar ook nieuw ontwikkelde onderwijsactiviteiten.

6 Een hypothetisch leertraject ontwikkelen voor de brugklas

In verschillende cycli is een hypothetisch leertraject ontwikkeld voor het laatste brugklasexperiment (in 1B). Binnen bepaalde contexten en in relatie tot staafgrafieken en stippendiagrammen leerden de leerlingen om allerlei aspecten van dataverzamelingen te beschrijven en te gebruiken in hun redeneringen: het gemiddelde, betrouwbaarheid (van batterijen), uitschieters, meer hoge waarden (scheve verdeling), verspreid of dicht bij elkaar. Om leerlingen te stimuleren zich op groepeigenschappen te richten, vroegen we hun om grafieken verzinnen die voldeden aan bepaalde groepeigenschappen, bijvoorbeeld een onbetrouwbaar batterijmerk met een hoge levensduur.

Een van de conclusies van de retrospectieve analyse was dat leerlingen geneigd zijn om verdelingen in te delen in lage, ‘gemiddelde’ en hoge waarden (hypothese C1 in

de Appendix). Verder bleek het nuttig om leerlingen zelf grafieken te laten maken en te laten vergelijken, en ze ‘wat-als-vragen’ te stellen over hypothetische situaties. In klas 1E (een vwo-klas) ontstond tijdens een klassengesprek over twee leerling-grafieken een discussie over de bult die in een van de grafieken te zien was (Figuur S.3 links). Dit was de eerste keer dat er over de vorm van een verdeling geredeneerd werd. Leerlingen uit die klas gebruikten het begrip ‘bult’ vervolgens ook om andere problemen op te lossen. Omdat deze klas het einddoel van redeneren over verdeling middels haar vorm het dichtst genaderd is, hebben we het symboliseerproces in deze klas in een apart hoofdstuk (8) geanalyseerd. Verder besloten we om het einddoel ‘verdeling als object met eigenschappen’ op te geven voor 1B, omdat we ervan overtuigd waren geraakt dat dit einddoel te ambitieus was voor een havo-klas in slechts twaalf lessen. In plaats daarvan leek het verstandiger om genoeg te nemen met het leren beschrijven hoe data verdeeld zijn en om de begrippen spreiding en steekproef centraler te stellen.

Door verschillende cycli van ontwikkelingsonderzoek te doorlopen is een hypothetisch leertraject ontwikkeld dat gefundeerd is op patronen in het leerproces van leerlingen en de leermiddelen die dit ondersteunen. De verschillen tussen de verschillende klassenexperimenten laten zien hoe subtiele wijzigingen in de vraagstelling kunnen leiden tot aanzienlijke verschillen in de leeropbrengst.

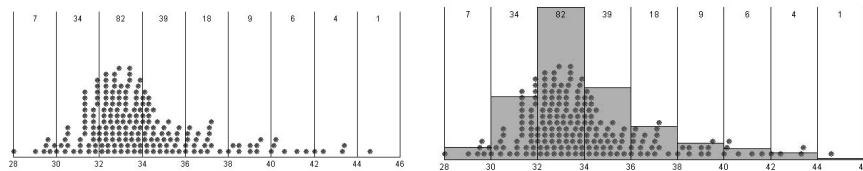


Figure S.2: Het spijkerbroekenprobleem: taillegegevens van 200 mannen in inches. Hier is gekozen voor vaste intervalbreedte (links), waarna het in de nieuwe versie van minitool 2 mogelijk is om voor een histogram te kiezen (rechts).

7 Het hypothetisch leertraject toetsen in een brugklas

Het leerproces in 1B bleek voor het grootste deel te verlopen zoals was voorspeld in het hypothetisch leertraject dat in de voorgaande experimenten ontwikkeld was. Een uitzondering hierop waren de activiteiten rond de mediaan, omdat de discussie over het nut van de mediaan te abstract bleek te zijn. Een andere uitzondering was het spijkerbroekenprobleem dat diende als voorbereiding op het histogram als symbool voor een frequentieverdeling (Figuur S.2): met name de rol van steekproeven in het spijkerbroekenprobleem bleek moeilijk te zijn. Het bescheidener einddoel om te kunnen beschrijven hoe data verspreid zijn, pakte wel goed uit. Leerlingen hadden een lokale visie op spreiding die mogelijk voorbereidde op een dichtheidsnotie en

een verdelingsbegrip: bij het uitleggen hoe data verspreid waren, beschreven leerlingen vaak de verdeling van de data.

Tijdens het laatste brugklasexperiment ontstond een nieuwe onderzoeksactiviteit: groeiende steekproeven. Bij het voorspellen van grafieken van grotere steekproeven spraken leerlingen van een preciezer gemiddelde, van een grotere spreidingsbreedte, meer ‘gemiddelde’ waarden, en voorspelden ze redelijk vloeiende en adequate vormen voor grote steekproeven. De activiteit rond groeiende steekproeven lokte coherent redeneren over statistische noties inclusief vorm uit. Daarom is besloten dit idee in een tweede klas te gebruiken als een steeds terugkerend thema.

Met de resultaten van de brugklasexperimenten kon de eerste onderzoeksvraag beantwoord worden. In het kort: brugklasleerlingen kunnen leren redeneren over verdeling op een informele manier als een vergelijkbaar hypothetisch leertraject gebruikt wordt. Desondanks raden we niet aan om verdeling als einddoel te formuleren in de basisvorming: het begrip is lastig om te ontwikkelen en te toetsen. Bovendien zijn de gunstige omstandigheden van het onderzoek (inclusief de mini-interviews) niet representatief voor reguliere onderwijssituaties. Het lijkt wel haalbaar voor leerlingen in de basisvorming om een statistische taal ontwikkelen waarin ze kunnen uitdrukken hoe data verspreid zijn.

8 Diagrammatisch redeneren met de ‘bult’

In klas 1E is het redeneren over de vorm van verdelingen het dichtst bij het einddoel gekomen. Dit redeneren is semiotisch geanalyseerd om inzicht te krijgen in het proces van symboliseren en zo de tweede onderzoeksvraag te kunnen beantwoorden. Er zijn verschillende theorieën over betekenisgeving toegepast op de episodes waarin met bulten werd geredeneerd. Het vruchtbaarst als analyse-instrument bleek de semiotiek van Peirce te zijn. Het belangrijkste voordeel van Peirces semiotiek boven bijvoorbeeld ketens van betekenisgeving (afkomstig van Lacan) was het niet-lineaire aspect. Met name de begrippen diagrammatisch redeneren en hypostatische abstractie bleken nuttig om het symboliseerproces te analyseren.

Diagrammatisch redeneren bestaat uit drie stappen: een diagram maken, ermee experimenteren en reflecteren op de resultaten. Bij het reflecteren is het van belang dat eigenschappen van diagrammen beschreven worden (*predikatie*). Een eigenschap van een diagram (bijvoorbeeld: “de stipjes zijn erg verspreid”) kan vervolgens als een zelfstandig object gezien worden dat weer eigenschappen heeft (“de spreiding is groot”). Deze abstractiestap, waarbij een predikaat tot een nieuw object wordt gemaakt, noemt Peirce *hypostatische abstractie*. Zo werd de beschrijving van “veel rond het gemiddelde en wat minder kleine en grote waarden” uiteindelijk benoemd met ‘bult’: een object dat beschreven kon worden en waarmee geredeneerd werd.

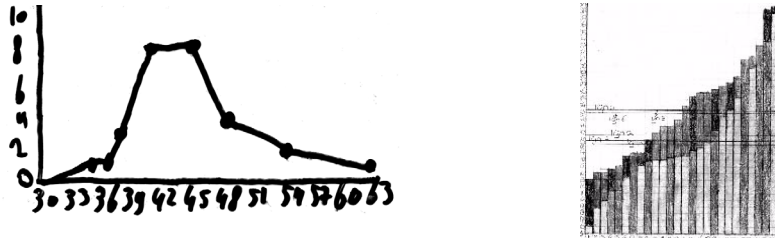


Figure S.3: De leerlinggrafieken die aanleiding gaven om over bulten te redeneren (links Mikes en rechts Emily's grafiek)

De 'bult' was niet alleen maar een plaatje of een metafoor: al snel konden leerlingen uitleggen waardoor de bult in Mikes grafiek veroorzaakt werd en waarom die bult in Emily's grafiek er als een horizontaal recht stuk uitzag. In dit stadium representeerde de bult voor leerlingen de grote groep waarden in het midden (de 'meerderheid'). In de volgende les redeneerden leerlingen met het begrip 'bult' om twee verdelingen te vergelijken: omdat de bult van één merk hoger lag, vonden leerlingen dat merk beter. De bult functioneerde dus als een groepsrepresentant, net zoals het gemiddelde vaak gebruikt wordt in de statistiek. In de volgende les zijn vragen gesteld om leerlingen te stimuleren met de bult als een object te laten opereren: wat gebeurt er met de bult als we niet brugklassers wegen maar tweedeklassers? Leerlingen verschoven de bult inderdaad als geheel ("dan is de bult meer naar rechts") en meenden dat die dezelfde vorm bleef houden als de steekproef steeds groter zou worden. Leerlingen hebben dus de gewichtdata in een bult gesymboliseerd: de bult is symbool gaan staan voor de verdeling van de data. Hier is het symboliseerproces dus geslaagd.

Aan de hand van de drie stappen van diagrammatisch redeneren konden we nog meer conclusies trekken. In de eerste stap, het diagrammatiseren, is het belangrijk dat leerlingen zelf diagrammen maken die voor hen betekenisvol zijn, of representaties zoals de minitools gebruiken die ze makkelijk kunnen interpreteren. Software is vooral nuttig bij de experimenteerfase van diagrammatisch redeneren: het experimenteren met redelijk omvangrijke dataverzamelingen is ondoenlijk met de hand, maar eenvoudig met de software. Verder kunnen leerlingen de data op verschillende manieren organiseren met de minitoolopties, zoals sorteren op grootte en subgroep, en verschillende groepen maken. De derde stap, de reflectie, is uiterst belangrijk om predikatie en hypostatische abstractie te stimuleren. Opvallend was dat de beste redeneringen plaatsvonden tijdens klassendiscussies buiten het computerlokaal. De docent speelt een uiterst belangrijke rol bij het enceneren van dergelijke discussies en bij het vormen van normen, bijvoorbeeld dat data gebruikt moeten worden als ze beschikbaar zijn. Het vergelijken van diagrammen van dezelfde dataverzameling kan zeer vruchtbaar zijn, vooral als leerlingen gestimuleerd worden te beschrijven

wat het gemeenschappelijke object is waarvan de diagrammen representaties zijn. Dit object is over het algemeen een hypostatistische abstractie, letterlijk een nieuw object dat verondersteld wordt ten grondslag te liggen aan verschillende verschijningsvormen.

9 Diagrammatisch redeneren over groeiende steekproeven

In het vervollexperiment in een tweede klas waren groeiende steekproeven een steeds terugkerend thema. Het doel was om het vermoeden te toetsen dat het redeneren over groeiende steekproeven het redeneren over de vorm van verdelingen in samenhang met steekproeven en andere statistische concepten zou stimuleren. In het tweede-klasexperiment is dit vermoeden bevestigd. Het hypothetisch leertraject luidde samengevat: progressief diagrammatisch redeneren over verdelingsaspecten in relatie tot groeiende steekproeven. Door deze formulering was het mogelijk om de twee onderzoeksvragen tegelijk te beantwoorden als antwoord op de volgende vraag:

Hoe kunnen leerlingen met weinig statistische kennis een begrip van verdeling ontwikkelen door diagrammatisch redeneren over groeiende steekproeven?

In de vierde les beschreven leerlingen allerlei eigenschappen van hun voorspellingsgrafieken in vergelijking tot grafieken met echte data (predikatie). Daarbij gebruikten ze allerlei termen die gaandeweg meer een objectkarakter kregen. Prototypisch is de overgang van “de stipjes zijn verspreid” naar “de spreiding is groot”. Bij de voorspelling van de gewichtsgrafiek van alle tweedeklassers in Utrecht dachten leerlingen aan drie vormen: piramide (Figuur S.4, links), klokvorm (rechts) en halve cirkel.

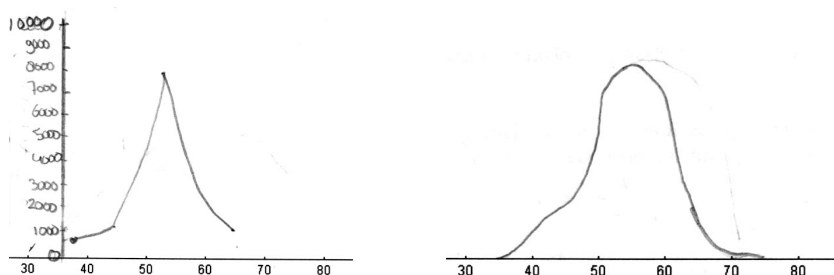


Figure S.4: Twee voorspellingen van de gewichtsverdeling van tweedeklassers

In de zesde les hebben we deze drie vormen plus twee scheve verdelingen als uitgangspunt genomen voor een discussie over de vraag welke het best bij de verdeling van gewicht past. De leerlingen participeerden goed in de discussie en gebruik-

ten allerlei statistische noties als instrumenten in hun redeneringen.

In de achtste les bleek dat veel leerlingen de steun van een bekende context nog niet konden missen. Ze zagen bijvoorbeeld lang niet altijd de vormen in groeiende steekproeven die ze uit tabellen met getallen trokken (de verdelingen waren uniform, normaal of scheef). Hoewel die vormen soms ook niet goed zichtbaar waren, speelde er vermoedelijk ook iets anders mee: de hypostatische abstractie van de verdelingsvormen was bij de leerlingen nog niet zo gevorderd was dat ze door de ruis van de variatie het signaal van de vormen zagen. Bovendien kwam aan het licht dat we te weinig aandacht hadden besteed aan het schalen van de x -as; dit was een missend element in de experimenteerfase met de minitools.

In de slotinterviews slaagden leerlingen er redelijk in om gemiddelde, mediaan en modus te lokaliseren in de schets van een scheve verdeling. Op de vraag wat een verdeling is, antwoordden enkelen: “hoe het verspreid is over de grafiek”. In overeenstemming met een conclusie van het experiment in 1B, bleek dat het begrip ‘spreiding’ voor leerlingen dicht tegen dat van verdeling aan lag (C7 in de Appendix). Anderen spraken over hoeveel stippen bepaalde waarden op de as kregen: “deze waarde krijgt wat meer en die waarde krijgt bijna niets”.

Dit geeft een mogelijk antwoord op de vraag uit hoofdstuk 5 wat de procedurele kant van het begrip verdeling zou kunnen zijn: data toevoegen aan de grafiek oftewel een steekproef laten groeien. Uit de analyses blijkt dat er vele stappen van hypostatische abstractie zijn in de ontwikkeling van het begrip verdeling. De vastgestelde gelaagdheid in het begrijpen van verdelingen kan helpen om bij een volgend experiment het einddoel ‘verdeling als object’ nauwkeuriger te operationaliseren.

10 Conclusies en discussie

Het doel van het onderzoek was om bij te dragen aan een empirisch onderbouwde instructietheorie voor aanvankelijk statistiekonderwijs. Er zijn hypothetische leertrajecten ontwikkeld voor de brugklas en de tweede klas, en er zijn patronen in het leerproces van leerlingen gevonden die in de meeste experimenten vergelijkbaar waren. De gemeenschappelijke patronen in het leerproces en de middelen die dit proces ondersteunen vormen de basis voor de instructietheorie. De antwoorden op de hoofdvragen kunnen als volgt worden samengevat.

1) Leerlingen kunnen onder gunstige omstandigheden een informeel begrip van verdeling ontwikkelen als de hypothetische leertrajecten uit dit onderzoek aangepast worden aan lokale omstandigheden. Met name de activiteiten rond groeiende steekproeven blijken het redeneren over verdeling te stimuleren. We raden echter niet aan om het redeneren over verdeling als vorm of object in de basisvorming als eindterm te kiezen.

2) Het proces van symboliseren kan beschreven worden als progressief diagrammatisch redeneren. Het is van belang dat leerlingen zelf diagrammen maken, dat ze ex-

perimenteren met data en diagrammen, bijvoorbeeld met geschikte computertools, en reflecteren op de resultaten. In de reflectiefase is het wenselijk dat het lesmateriaal en de docent gelegenheden creëren voor predikatie en hypostatische abstractie. Het onderzoek heeft ook tot allerlei aanbevelingen geleid over het leren van statistische kernbegrippen, over symboliseren en het gebruik van computertools. We noemen enkele.

Data en context. Data zijn getallen in context (Moore, 1990). Als leerlingen zich niet goed in de context verdiepen, zijn ze geneigd met de data te rekenen, maar als ze zich alleen in de context verdiepen en de beschikbare data niet gebruiken, doen ze uitspraken die niet op de data gebaseerd zijn. Gezamenlijk doorspreken waar data vandaan komen is belangrijk om de connectie tussen data en context te leggen. Het is daarom onder meer wenselijk grote opdrachten te gebruiken waarbij leerlingen de context goed leren kennen. Nu krijgen leerlingen in reguliere wiskundelessen soms wel acht verschillende contexten per les voorgeschoteld, wat oppervlakkigheid in de hand kan werken (cf. Van den Boer, 2003).

Centrum van een verdeling. Het is van belang dat leerlingen een taal ontwikkelen waarmee ze hun intuïties en observaties in relatie tot simpele grafieken kunnen verwoorden. We kunnen gebruikmaken van de intuïtie die leerlingen al lijken te hebben van verdelingen: er zijn normale en uitzonderlijke gevallen, dus lage, gemiddelde en hoge waarden. De ‘gemiddelde’ groep kunnen we zien als een intuïtieve voorloper van het centrum van de verdeling. Pas als leerlingen met een notie van centrum kunnen redeneren lijkt het zin te hebben om dat centrum te meten met een formele maat zoals het gemiddelde of de mediaan.

Van spreiding naar verdeling. Als voorloper van het beschrijven van verdelingen, is het zinvol om leerlingen te laten verwoorden hoe data verspreid zijn. De begrippen ‘bereik’ en ‘spreidingsbreedte’ kunnen in een vroeg stadium aangeleerd worden om te voorkomen dat het woord ‘spreiding’ degenerereert tot ‘spreidingsbreedte’. Het kost meer moeite om tot een formele spreidingsmaat te komen. De meest voor de hand liggende spreidingsmaat is de kwartielafstand, maar die moet goed voorbereid worden, bijvoorbeeld via vier (ongeveer) even grote groepen of met een optie voor de middelste 50 procent van de data. Er lijkt echter een conflict te zijn tussen de intuïtie van een verdeling bestaande uit drie groepen en de formele manier om kwartielen te gebruiken, die tot vier groepen leiden. In ieder geval moet de rol van de mediaan opnieuw overdacht worden; de historische analyse kan daarvoor aanwijzingen bieden.

Groeiende steekproeven. Leerlingen waren vaak geneigd om erg kleine steekproeven te kiezen of de hele populatie te willen meten. De activiteiten rond groeiende steekproeven blijken een geschikte manier te zijn om leerlingen over steekproefgrootte en de vorm van een verdeling te laten redeneren. Bovendien kan middels dergelijke activiteiten het verband tussen steekproef en populatie gelegd worden.

Diagrammatiseren en symboliseren. Om diagrammatiseren en daarmee symboli-

seren te stimuleren is het zinvol om leerlingen zelf grafieken te laten verzinnen en die te vergelijken. Bij het voorspellen van hypothetische situaties zijn leerlingen gedwongen om vanuit een eigenschap van een dataverzameling als geheel te denken, zodat ze niet aan individuele data kunnen denken. Het is ook belangrijk om simpele grafieken aan te bieden die instrumenten in het diagrammatisch redeneren kunnen worden; staafigrafieken en bolletjesgrafieken (*dot plots*) zijn geschikte kandidaten. Sommige eigenschappen van histogrammen en boxplots zijn weliswaar makkelijk af te lezen, maar zulke geaggregeerde grafieken zijn voor leerlingen in de basisvorming lastig om te interpreteren als symbolen voor verdelingen. Als onderdeel van het diagrammatisch redeneren is het ook van groot belang dat de objecten van aandacht goed gedefinieerde onderwerpen van gesprek worden. Het is verder wenselijk dat leerlingen een wat-als-houding ontwikkelen en op de merites van verschillende datarepresentaties reflecteren. Het moeten aannemen van de rol van data-analist kan een dergelijke houding stimuleren.

Computertools. De minitools zijn simpele computertools die vrijwel geen technische problemen opwerpen, maar hier staat tegenover dat ze beperkte mogelijkheden bieden. Minitool 1, bijvoorbeeld, biedt alleen horizontale staven, terwijl veel leerlingen uit zichzelf verticale tekenen. De computertools lijken vooral nuttig te zijn om met dataverzamelingen en representaties te experimenteren. Het is belangrijk dat reflectie gestimuleerd wordt, en dit blijkt makkelijker te gaan als er geen computers binnen handbereik zijn. De ervaring leert dat de docent een uiterst belangrijke rol speelt bij het ondersteunen van de meeste van onze aanbevelingen. In algemenere zin is het onze overtuiging dat alle onderwijsfactoren zoals docentgedrag, leerstof, onderwijsactiviteiten en eindoelen op het gebruik van computertools afgestemd moeten worden. Alleen dan lijkt het de moeite waard om erin te investeren.